

**Милан В. Живановић<sup>1</sup>**Висока школа струковних студија за образовање васпитача,  
Крушевац

Стручни рад

doi: 10.5937/inovacije1601115Z

## Примена Геоџедре у креирању математичко-логичких игара

**Резиме:** Значај игре у учењу истицајући је још од античких филозофа. Игра као метод учења је карактеристична и преовлађујућа у предшколском образовању и васпитању. У мањем обиму она се користи и у нижим разредима основне школе, док је на каснијим узрастним нивоима јошвише ишчезла. Експериментална испитивања крајем прошлог века су показала неке вредности ове методе. Савремене информационе технологије итери као методи учења дају нову димензију и широку применљивост. Један од програмских пакета који је у последње време стекао велику популарност у настави математике је Геоџедра. Геометријске трансформације, креирање случајних бројева и динамичке функције програма могу се ефикасно применити у креирању разних комбинаторних и логичких проблема и игара за разне нивое школовања. Саставни део овог пакета су база радова и форум на којима корисници могу објавити своје радове и разменивати искуства. Циљ овог рада је да кроз изабране примере представимо неке од могућности Геоџедре у креирању и дистрибуцији математичко-логичких игара припремљених за ученике средњих школа и старијих разреда основне школе.

**Кључне речи:** Геоџедра, математичко-логичке игре, решавање проблема.

### Увод

У данашњем свету човек је од најранијег узраста окружен мноштвом информација из разних сфера људског деловања. Често рани сазнајни утисци и несвесно постану опредељујући у будућим ангажовањима појединца. С друге стране, свака делатност захтева изградњу ши-

роке популације која ће бити база за школовање врхунског кадра за њен даљи развој. Мора се признати да математика, као изузетно интелектуално захтевна, није привлачна као наставни предмет за већину деце. Због тога је рад у настави математике изузетно деликатан у проналажењу мере између противречности популарних и стручних садржаја. Питање како озбиљне математичке теме методички привлачно обликова-

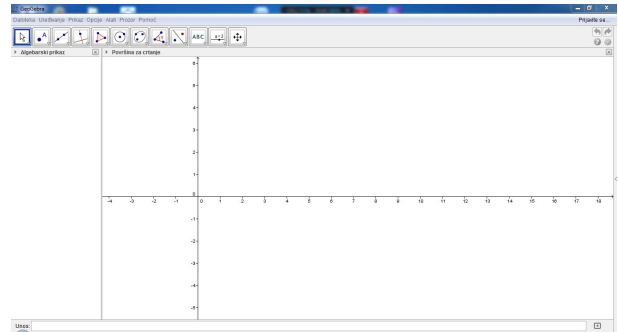
<sup>1</sup> mzivanovic@vaspks.edu.rs

ти у образовној пракси је једно од кључних питања математичког образовање кроз векове.

Метода учења кроз игру се изборила за свој статус у настави. У пракси је она преовлађујућа у најранијем периоду образовања, а са узрастом ученика њена примена опада. Може се рећи да је тај тренд донекле оправдан условљавањем наставних садржаја, али, такође, и да за методу учења кроз игру треба наћи места у средњој школи и старијим разредима основне школе. Математичко-логичке игре ученику обезбеђују: могућност експеримента, уочавање сопствених грешака и њиховог исправљања, решавање проблема на више начина у потрази за што ефикаснијим решењима, подстицање иницијативе и амбиције у одбрани својих закључака (Živanović, 2013). Ова метода је поготово погодна у развијању комбинаторно-логичког мишљења приликом примене у ваннаставним активностима. Снажан мотивациони импулс такмичарских игара може се искористити и за популаризацију математике кроз разне видове игровних активности: наградних задатака, математичких квизова, како индивидуалног, тако и тимског карактера. У припремама за те активности значајну улогу имају специјализовани курсеви, математичке трибине, организација математичких секција и клубова итд.

Рачунар као универзално средство нашао је своју примену и у настави. Специјализоване математичке апликације омогућиле су визуелизацију математичких објеката и процеса, убрзале извођење сложених операција. Тај напредак се одразио и у већој могућности осмишљавања математичких игара и њиховој широј употреби. Један од веома корисних и у последње време, оправдано, све више коришћених програмских пакета за наставу математике је Геогедра. Програм има велике могућности визуелизације, како геометријских, тако и садржаја из других математичких дисциплина. За даљи раз-

вој пројекта задужен је интернационални тим стручњака у више Геогедра центара, у универзитетским градовима широм света. Саставни део програма је и база радова GeoGebraTube<sup>2</sup>, у којој се налази преко сто шездесет хиљада<sup>3</sup> радова. Такође, постоји и форум за размену искустава међу корисницима. Растућа популарност програма проистиче из чињенице да је једноставан за коришћење, бесплатан, те да је преведен на многе светске језике<sup>4</sup>. На Слици 1 представљен је почетни изглед радне површине програма са стандардним алатима и приказима.



Слика 1. Изглед радне површи Геогедра са стандардним алатима и приказима.

Могућности генерисања случајних бројева, коришћења геометријских трансформација и математичких функција овог програма велики број аутора је искористио за креирање математичко-логичких игара које се могу користити, како у настави, тако и у тренуцима разоноде. Ради сликовитијег представљања тих поступака, у тексту ће бити уврштене иконе најчешће коришћених команди (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).



2 <http://www.geogebra.org/>

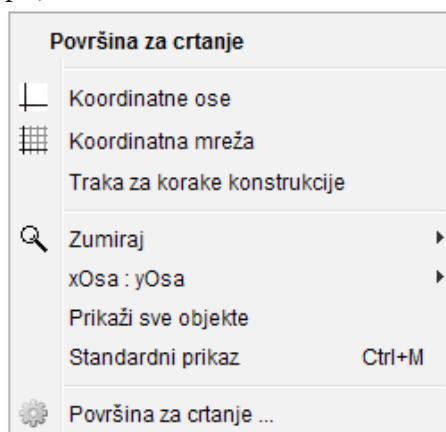
3 Податак од фебруара 2015.

4 На српски језик програм су превели професори др Драгослав Херцег и др Ђорђе Херцег.

## Примери игара креираних у Геогейбри

Већ је речено да Геогейбра пружа мноштво могућности за прилагођавање традиционалних математичко-логичких игара за играње на компјутеру. Дobar наставник и сам може креирати нове игре, чији циљеви такође могу бити различити у зависности од математичке области, интелектуалне захтевности или броја играча за које се организују. Лака манипулација са игровним материјалом и брзо враћање на претходне кораке након учачања грешке чине игре у Геогейбри динамичним и привлачним. Такође, сајт GeoGebraTube служи као широко доступна база дидактичког материјала и омогућава комуникацију и размену искустава аутора и корисника са свих меридијана.

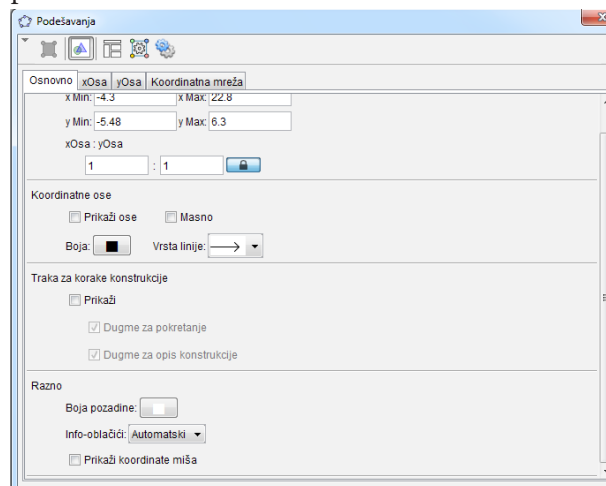
Први задатак у креирању игара је организовање радне површине. Најчешће се искључи алгебарски приказ кликом на одговарајуће дугме  тог прозора. У површини за цртање, избором једног од дугмића , постави се подлога са координатним системом или без координатног система, односно квадратића. Десним кликом на радну површину добија се мени за њено даље уређење (Слика 2).



Слика 2. Мени за уређивање површи за цртање

Избором последње команде тог менија отвара се нови прозор (Слика 3) помоћу којег се

могу подесити додатне особине површине за играње.



Слика 3. Мени за додатна подешавања радне површи


У даљем тексту ће бити описани поступци креирања неких математичко-логичких игара у Геогейбри.

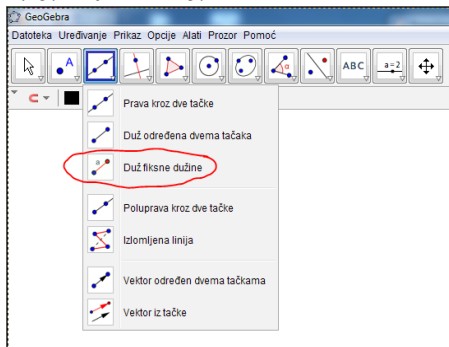
### 1. Проблеми са палидрвцима

Проблеми са палидрвцима су веома популарни у школској популацији. Код тих проблема се тражи да се одређени број палидрваца премести, избаци или дода да би се дошло до задатог циља. Задаци могу бити из разних математичких области:

- аритметички (прављење бројевних једнакости);
- геометријски (трансформације и изградња геометријских објеката у равни и простору);
- логичко-комбинаторни (прављење разних распореда, објеката и структура од палидрваца).

У овим играма постоји мноштво проблема са задацима који се могу погодни структурирати у више нивоа захтевности, од лакшег ка тежем. Уједно, ови су проблеми најједноставнији за креирање.

Прављење палидрвца у Геогебри започиње избором троуглића у доњем десном углу иконице . Отвара се падајући мени одакле бирамо команду *дуж фиксне дужине* (Слика 4).

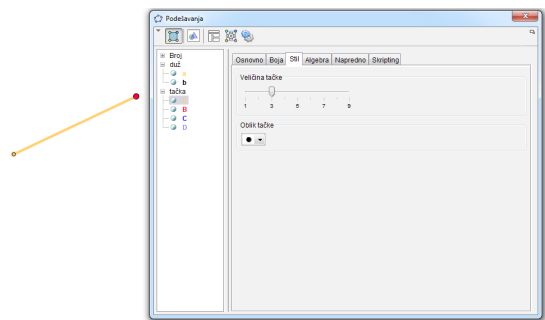


Слика 4. Мени за креирање њравих линија, дужи, изломљених линија и вектора.

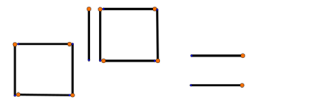
Избором почетне тачке и дужине дужи на површини за цртање добија се дуж коју није могуће деформисати манипулацијом мишем. Може се уочити да се деловањем мишем на почетну тачку дуж транслира, а аналогном акцијом на крајњу тачку дуж ротира. Ове чињенице се користе за позиционирање дужи у прављењу проблема и каснију манипулацију са палидрвцима приликом решавања проблема. Потребно је добијену дуж додатно обликовати тако да више личи на палидрвце. Десним кликом миша на било који објект на радној површини добија се мени са особинама тог објекта. У том менију се могу модификовати особине дужи тако да она поприми облик палидрвца. Креатор игре у том менију подешава дебљину, боју и друге особине палидрвца према свом нахођењу. Ова операција се изводи одвојено за дуж и њене крајње тачке (Слика 5).

Након тога треба припремити онолико палидрваца колико је потребно за задати проблем и поставити их у почетни положај. Десним кликом миша означи се палидрвце, а затим се из падајућег менија *уређивање*, изабере команда *копирај* (Ctrl+C). На изабраном месту радне по-



вршине командом *залепи* (Ctrl+V) поставља се ново палидрвце. Последња команда се понавља док се не добије потребан број палидрваца. На крају се направљена палидрвца поставе у положај замишљеног проблема. На Слици 6 је пример једног таквог проблема, у којем треба померити два палидрвца да би се добила тачна једнакост.

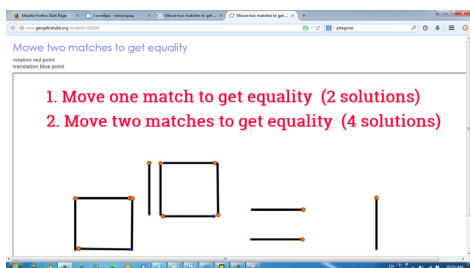


Слика 5. Палидрвце са менијем за његово уређење.



Слика 6. Пример проблема са палидрвцима.

Потребно је још додати текст за дати проблем. Из падајућег менија  треба изабрати опцију *удацавање текста*. У прозору *уређивање* тог менија унесе се одговарајући текст. По завршетку уноса кликне се на команду  и текст ће бити видљив на радној површини. Десним кликом на текст и избором опције *особине* текст се може додатно обликовати: величина и избор фонта, боја слова или позадине текста итд. На крају се текст позиционира мишем и проблем је спреман за решавање. Потребно га је још снимити неком од понуђених опција. Овако креирана игра се може поставити на интернет избором команде *дели* из менија *датотека* или избором опција *извоз+динамички цртеж као веб-страница* (Ctrl+Shift+W). На Слици 7 постављен је проблем добијања тачне једнакости преношењем одговарајућег броја палидрваца.

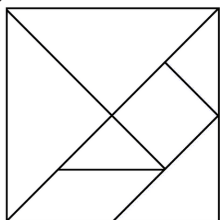


Слика 7. Пример проблема са паличкима на GeoGebraTube.

За једно од решења ( $e^{i\pi} = -1$ ) проблема са слике потребно је напредније знање из теорије комплексних бројева. Остала решења доступна су ученицима средњих школа.

## 2. Танграм

Танграм је стара математичка слагалица пореклом из Кине. Име потиче од назива кинеске династије Танг, у време чије владавине се сматра да је игра настала. Изворно, елементи танграма су седам фигура насталих из квадрата исецањем по линијама као на Слици 8.




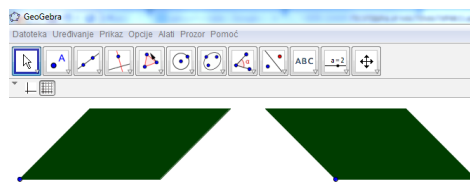
Слика 8. Квадрат подељен на делове танграма.

Употребом свих делова потребно је сложити задату фигуру. У књигама из 19. века пронађено је преко шест и по хиљада различитих танграм проблема. Данас је тај број знатно већи. Ипак, 1942. године кинески математичари су доказали да постоји тачно тринаест различитих конвексних фигура које се могу сложити од свих делова танграма (Wang & Hsiung, 1942).


Може се рећи да постоје два основна нивоа интелектуалне захтевности игре. У лакшем су делови из којих се слаже задата фигура, истак-

нути тако што су подељени линијама, обојени различитим бојама или веома мало размакнути, док у тежем начину задавања проблема таквих олакшица нема.

Игра се у Геогебри може креирати на следећи начин. Већ описаним поступком се постави радна површина. Делови слагалице се конструишу појединачно употребом команде *кружи мноштво* из падајућег менија са иконом . Тако добијене фигуре нису деформабилне, а манипулација њима се врши избором једног од двају истакнутих темена притиснутим левим тастером миша. У неким проблемима је ромбоид потребно просторно ротирати. Тај потез може се решити на следећи начин. Конструишу се два подударна ромба као на Слици 9.

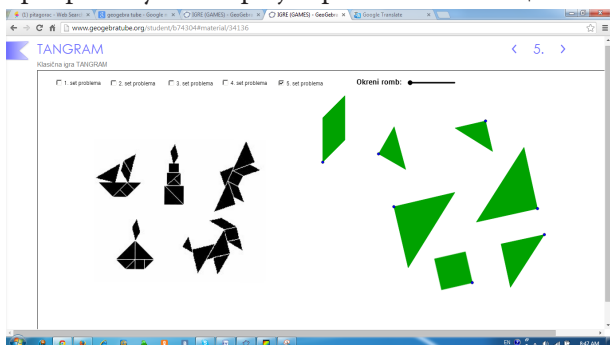


Слика 9. Два симетрична положаја ромбоида за танграм.

Употребом команде *клизач*  генерише се случајан број. У менију за креирање случајног броја изабере се опција *цело број*, а вредности за минимум и максимум – 1 и 2. Десним кликом редом на ромбоиде у менију *подешавања* постављају се додатни услови за њихово приказивање. У језичку *најпрво*, у пољу *услов за приказивање објекта*, за први ромбоид се упише  $n = 1$ , а за други  $n = 2$ . Након затварања тог менија, померањем клизача из једног крајњег положаја у други, према потреби, добија се слика једног од конструисаних ромбоида. Поред клизача треба убацити текстуалну поруку „Окрени ромб“, као обавештење о команди за ту операцију. Тиме је припремљен манипулативни део дидактичког материјала. Потребно је још убацити задатке. Могуће је са интернета снимити неку од слика



проблема на хард-диск рачунара у фолдер за то припремљен. Из падајућег менија *уређивање* командом *убаци слику из* изабрана слика се постави на радну површину. Обично је та слика већег формата. Фиксирањем мишом само једне од тачака испод слике помоћу стрелица на тастатури слика се може форматирати на жељену величину. Тачке испод слике уклањају се десним кликом миша и искључивањем команде *прикажи објекат*. Битно је да се не изабере команда *брисање*, јер ће тим избором бити избрисана цела слика. На овај начин проблем је креиран и спреман за решавање. Игра се може побољшати убацивањем слика више појединачних проблема уз везивање њиховог приказивања за нови клизач, коме се може укључити и опција анимације. Додатно се у особинама клизача може подесити врста и брзина анимације. Пример танграма креираног у Геогебри је приказан на Сlici 10.



Слика 10. Танграм креиран у Геогебри.

### 3. Пасијанс са доминама

Основни елементи игре пасијанс са доминама су правоугаона табла са  $8 \times 7$  квадратића на којима су исписани цели бројеви од нула до шест (Слика 11) и сет елемената за игру домино са плочицама за играње од 0:0 до 6:6.

Таблу је потребно прекрити доминама, тако да сви квадратићи буду прекривени домино плочицама са одговарајућим бројем тачкица. Решење проблема са Сликe 11 дато је на Сlici 12. Заинтересовани читаоци опширан поступак

овог решења могу погледати у књизи Л. Мочалова (Моџалов, 1980).

8	0	6	2	5	0	0	5
7	0	4	3	2	6	6	2
6	6	1	6	1	3	1	1
5	6	1	2	5	1	1	6
4	0	2	2	5	3	4	4
3	3	1	2	4	0	4	4
2	3	0	3	3	5	5	4
1	5	5	0	2	6	3	4
	a	b	c	d	e	f	g



Слика 11. Пример проблема домино пасијанса.

8	0	6	2	5	0	0	5
7	0	4	3	2	6	6	2
6	6	1	6	1	3	1	1
5	6	1	2	5	1	1	6
4	0	2	2	5	3	4	4
3	3	1	2	4	0	4	4
2	3	0	3	3	5	5	4
1	5	5	0	2	6	3	4
	a	b	c	d	e	f	g

Слика 12. Решење домино пасијанса са Сликe 11.

За конструкцију домино плочица, за ову и сличне домино игре користи се већ коришћена команда *крети мноштво*. Таблу за играње са одговарајућим бројевима је могуће нацртати на радној површини, коришћењем алата за цртање и уношење текста за бројеве. Табла и бројеви треба да буду непокретни, што се постиже употребом команде *непокретни објект* из менија за основне особине објекта, који се добија десним кликом миша на жељене објекте. Више проблема из пасијанса могуће је погледати у већ цитираној књизи Л. Мочалова (Моџалов, 1980).

Ове елементе је као слике могуће припремити и у неком другом програму, па их касније



увести у Геџебру и подесити димензије слике тако да домино плочице заузимају два квадрата из табле. У том случају, увозом више слика, којима се у услови за приказивање даје одговарајући јединствен број из већ конструисаног клизача, може се постићи посебна атрактивност игре. У ту сврху се у картици за подешавање клизача у језичку *основно* укључи опција *анимирај*, а у језичку *клизач* истог менија се подесе остали параметри клизача. Тада се у доњем левом углу радне површине појави икона  за покретање, односно  за заустављање анимације за случајан избор проблема.

#### 4. Математички проблеми на шаховској табли

Постоји велики број комбинаторних проблема о распореду шаховских фигура на табли, деоби шаховске табле на подударне делове који садрже одређене шаховске фигуре, кретању појединих фигура на целој или неком делу шаховске табле, до бројевних проблема типа магичног квадрата (Моџалов, 1980; Новчић, 1986). Креирање оваквих задатака у Геџебри не представља захтеван проблем. Избор радне површине и конструкција шаховске табле се врше помоћу већ описаних команди за цртање геометријских фигура и њихово бојење. Потребне шаховске фигуре могу се увести са интернета помоћу команде *убаци-*

**Izaberi broj zadatka:**  n = 7

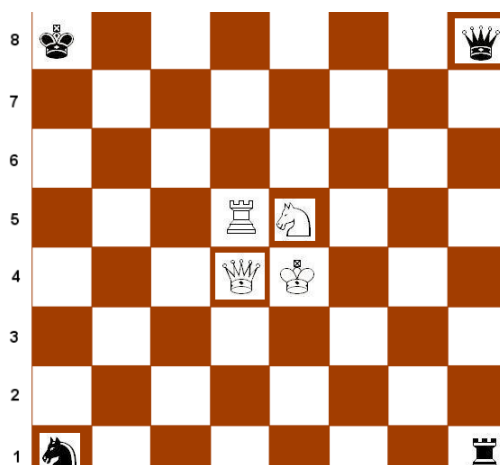
7. Podeliti šahovsku tablu na 4 podudarna dela tako da u jednom budu oba kralja, u drugom obe dame, u trećem oba topa i u četvrtom oba skakača.

вање слике из менија  и поставити у почетни положај. Уколико треба више проблема поставити у једној игри, потребно је искористити већ описану команду *клизач* . Сваком појединачном проблему додели се једна страница за приказ. Цела страница са датим проблемом се обележи мишем или командом CTRL+A са тастатуре. За тако изабране објекте десним тастером миша се отвара нов мени, одакле се бира опција *особине*. У новодобијеном менију под језичком *најредно* у услове за приказивање објекта убаци се за вредност променљиве у клизачу редни број проблема. Поред клизача се још убаци текстуална порука „Изабери број задатка“. На Слици 13 приказан је пример овако креиране игре (Živanović, 2014).

Осим описаних игара, у Геџебри је могуће креирати и многе друге друштвене игре које у својој природи садрже математичко-логичку проблематику као што су асоцијације, судоку, мој број итд.

#### Закључак

Група америчких педагога из Морнарничког истраживачког и развојног центра 1992. године



Слика 13. Пример математичког проблема на шаховској табли.

је експериментално утврдила неке од предности методе учења кроз игру (Randel et al., 1992). Та предност је значајно изражена у мотивацијској улози, бржем решавању проблема и трајнијим знањима. Развој информационих технологија је овој методи дао нови замах. У неколико описаних примера су презентоване могућности које у томе пружа Геогebra. На основу приказаног, овај

програмски пакет се може препоручити за креирање математичко-логичких игара. Те игре се могу користити, како у настави, тако и у ваннаставним активностима. Позитивни ефекти тих игара могу бити од користи у усвајању нових и утврђивању претходних знања, а свакако понајвише у популаризацији математике.

### Литература

- Hohenwarter, M. & Hohenwarter, J. (2009). *GeoGebra pomoć 3.2*. Posećeno 23. 6. 2014. godine na: <http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs/uputstvoGGB.pdf>.
- Моћалов, Л. П. (1980). *Golovolomki, (vyпуск 6)*. Moskva: Bibliotečka Kvant.
- Novčić, S. D. (1986). *Šah i matematika*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- Randel, J. M., Morris, B. A., Wetzell, C. D. & Whitehili, B. V. (1992). The Effectiveness of Games for Educational Purposes: A Review of Recent Research. *Simulation & Gaming*, 23 (3), 261.
- Wang, F. T. & Hsiung, C. (1942). A Theorem on the Tangram. *The American Mathematical Monthly*, 49 (9), 596–599. Retrieved May 29, 2014. from
- Živanović, M. (2013). Geogebra i matematičko-didaktičke igre. U: Grujić, T. (ur.). *Kompetencije vaspitača za društvo znanja* (284–290). Kikinda: Visoka škola strukovnih studija za obrazovanje vaspitača.
- Živanović, M. (2014). *Igre*. Posećeno 23. 6. 2014. godine na: <https://www.geogebra.org/material/show/id/74304>.

### Summary

*Significance of playing in learning has been stressed since the antique philosophers. Play as the method of learning is characteristics and overwhelming in pre-school education and pedagogical work. In lesser extent, it is being used in lower grades of the primary school, and in later age levels it almost disappeared. Experimental research at the end of the last century showed some of the advantages of this method. Contemporary information technologies give new dimension and wide application to playing. One of the programme packages, which have become popular recently, in teaching Mathematics, is Geogebra. Geometrical transformations, creating random numbers and dynamic function of programme can be efficiently applied in creating different combined and logical problems for playing at different levels of education. Integral part of this package includes the base of papers and the forum in which the users can publish their papers and exchange experience. The aim of this paper is that through chosen examples, some of the possibilities of Geogebra can be presented, concerning creating and distribution of mathematical-logical games prepared for secondary school students and upper classes of the primary school.*

**Key words:** *geogebra/ mathematical-logical games/ solving problems.*