



Светлана М. Илић¹, Маријана Ж. Зељић
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Оригинални
научни рад

Правила сталности збира и разлике као основа стразијеија рачунања²

Резиме: Развијање вештина рачунања један је од примарних задатака њоћеине настае ариџмеџике. Исџунџиџи овај задатак џодразумева да учениџи џреда да буду у стању да одаберу џоџодан меџод у рачунању. Најџоџоднија стразијеија зависи од карактерџстика бројева у изразу, узрасџа ученика, као и сџџуације у којој се рачуна. Учениџи који џоседују висок стџеен разумевања односа између сабирања и одузимања, карактерџстика декадноџ бројевноџ сџстема и џравила која џа оџисују (џравила ариџмеџике) џоказују већу флексибилност у одаџиру адекватних стразијеија рачунања. Циљ исџраживања јесте исџиџивање начина и стџеена разумевања џравила сталности збира и разлике од стране ученика, а разумевање џосаџирамо као џримену наведеноџ џравила у џосџуџцима рачунања. Узорак исџраживања чџни џридесетџ и деветџ ученика четвртоџ разреда једне београдске основне школе. Коришћена је дескриџџивна меџода, џехнике џестирања и инџервјусања. Резулџаџи исџраживања џоказују да знање ученика о исџиџиваним џравџлима није оџераџивно, џо јестџ да учениџи нису у моџућности да џа џримене у одџоварајућим сџџуацијама. Учениџи стразијеије засноване на наведеном џравџлима чеџће џримењују као менџиалну стразијеију неџо у сџџуацији џаџир–оловка, али анализа резулџаџа џоказује да учениџи нису флексибилни у одаџиру одџоварајуће стразијеије. Моџуће решење овоџ џроблема видимо у конкретџизацији меџодџчких уџџџсџава у Наставном џроџраму, џиџо би џредсџављало јасније смернице, како учџџељима, џако и ауџорима уџбеника.

Кључне речи: џравила сталности збира и разлике, стразијеије рачунања.

1 svetlana.ilic@uf.bg.ac.rs

2 Рад представља прерађен део мастер рада „Разумевање и примена правила о сталности збира и разлике“, одбрањеног на Учитељском факултету Универзџтета у Београду. (Ментор: др Маријана Зељић)

Copyright © 2016 by the authors, licensee [Teacher Education Faculty](#) University of Belgrade, SERBIA.

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original paper is accurately cited.

Теоријске основе

На значај примене правила аритметике као основе за различите поступке рачунања указују бројни аутори. У литератури се разликују стандардне и алтернативне стратегије (поступци, процедуре) рачунања (Carpenter et al., 1998; Fuson et al., 1997; Torbauns et al., 2009). Алтернативне стратегије су оне стратегије које служе као олакшице у рачуну, могу да убрзају рачунање и погоднија је њихова примена у неким примерима него коришћење стандардних алгоритама. Ученици алтернативне стратегије могу спонтано, интуитивно развити (до неке мере), а могу и да буду научени, док су стандардне стратегије оне које се активно, системски обрађују у настави и најчешће користе (Carpenter et al., 1998; Fuson et al., 1997; Torbauns et al., 2009). У нашој образовној пракси се разликују поступци „усменог“ и „писменог“ рачунања. Подела на усмено и писмено рачунање има дугу традицију у нашем образовном систему. Стеван Д. Поповић у књизи *Рачуница за основне школе за I и II разред* (Роровић, 1878) усмено рачунање одређује као „рачунање у глави“, без икаквог записа. Сваки разложени поступак који се проводи уз записивање тог поступка Поповић назива писменим рачуном, а цифарско рачунање (данашње схватање писменог рачунања) објашњава као „краћи начин“ писменог рачунања. Под усменим рачунањем данас подразумевамо поступке у којима се бројеви разлажу (растављају) на различите начине, уз коришћење својстава рачунских операција, како би се лакше израчунала вредност датих израза (Milinković, Zeljić, 2014). Разумевање и примена различитих стратегија рачунања треба да омогуће ученицима боље и потпуније разумевање и усвајање правила аритметике и рачунских операција сабирања и одузимања.

Да би успешно изградили различите стратегије рачунања, ученици морају разумети декадни бројевни систем. Декадни запис броја је најинформативнији и подстиче јасну предста-

ву о бројности. Ту идеју Марјановић објашњава на следећи начин: „Декадни начин записивања бројева везан је за идеју о груписању, која нас води до једнозначног означавања бројева и до њиховог лаког поређења“ (Marjanović, 2004: 7). Питање које се поставља јесте: Да ли ученици прво треба да савладају правила и појмове који карактеришу декадни бројевни систем, или је потребно да прво савладавају поступке сабирања и одузимања, или цео процес тече истовремено? Карпентер и сарадници сматрају да је ово последње тачно (Carpenter et al., 1998).

Спиритије рачунања. Коришћење само једног поступка при решавању задатака са сабирањем и одузимањем спречава развој математичке писмености ученика (Peltenburg et al., 2012). Карпентер и сарадници (Carpenter et al., 1998) наводе да и стандардни алгоритми и алтернативне стратегије комплексни задатак рачунања деле у кораке, на једноставније елементе над којима се врше операције са доступним знањем процедура. Највећи број процедура за сабирање и одузимање вишецифрених бројева се своди на сабирање и одузимање једноцифрених бројева или одговарајућих декадних јединица. Аутори наводе да су стандардне процедуре настајале годинама, оне су најефикасније, али су често одвојене од појмова на којима се заснивају (зато их понекад ученици тешко усвајају). За разлику од њих, алтернативне стратегије баш и потичу од карактеристика вишецифрених бројева, а не свде се само на карактеристике сабирања и одузимања једноцифрених бројева.

Ученицима, након упознавања више различитих поступака рачунања, треба дозволити да сами одаберу погодан поступак којим би решили дати проблем. Идентификовање стратегија које ученици користе као олакшице за сабирање и одузимање у домену од двадесет до сто предмет је истраживања које су реализовали Торбејнс и сарадници (Torbauns et al., 2009). Они су издвојили следеће стратегије: а) стратегије де-

композиције – растављање сабирака на вишеструке јединице, десетице, стотине, а затим сабирање одговарајућих декадних сума ($45 + 29: 40 + 20 = 60$, $5 + 9 = 14$, $60 + 14 = 74$); 2) секвенцијалне стратегије – један број остаје непромењен, а други се раставља на вишеструке десетице и јединице ($49 + 25: 49 + 20 = 69$, $69 + 5 = 74$) и 3) стратегије пречица – стратегије компензације (ако су цифре јединица 8 или 9: $49 + 25: 50 + 24$) и индиректно сабирање (одузимање преко сабирања, $53 - 48$, $48 + 2 = 50$, $50 + 3 = 53$, резултат је $2 + 3 = 5$). Све стратегије, осим индиректног сабирања, имају сличне облике и при одузимању.

Фјусон и сарадници (Fuson et al., 1997) у свом истраживању на великом узорку су класификовали методе које ученици користе за сабирање и одузимање двоцифрених и троцифрених бројева. У оквиру коришћених стратегија постоји стратегија коју су назвали „пребаци и врати“. Аутори на следећи начин објашњавају наведену стратегију: при сабирању (за пример $38 + 26$) поступак је: $38 + 30 \rightarrow 68 - 4 \rightarrow 64$; а за одузимање (за пример $64 - 26$) поступак је: $64 - 30 \rightarrow 34 + 4 \rightarrow 38$. Следећа коришћена стратегија је: $38 + 26 \rightarrow 40 + 26 \rightarrow 66 - 2 \rightarrow 64$, односно $64 - 26 \rightarrow 66 - 26 \rightarrow 40 - 2 \rightarrow 38$. Међу стратегијама које су коришћене уочена је и стратегија која представља експлицитну примену правила сталности збира и разлике: $(38 + 2) + (26 - 2) \rightarrow 40 + 24 \rightarrow 64$, $(64 + 4) - (26 + 4) \rightarrow 68 - 30 \rightarrow 38$. Наше мишљење је да се све наведене стратегије заснивају на примени правила зависности резултата од промене компоненти, а у последње наведеном стратегијама приказан је и експлицитан читав поступак рачунања, што представља највиши ниво знања. Управо у томе видимо разлог што, када је реч о тим стратегијама, аутори истичу да постоји когнитивни конфликт код ученика: код сабирања један број додајемо/одузимамо, а затим га одузмемо/додамо, док код одузимања исти број додајемо/одузимамо и умањенику и умањеоцу. Постојање наведеног конфликта показује да постоји неразумеваше поступка,

посебно код одузимања, и да ученици, уопште, теже савладавају поступке одузимања. Разлози за то могу бити: за одузимање у скупу природних бројева не важе асоцијативност и комутативност као код сабирања, активности у настави које недовољно и на неадекватан начин наглашавају супротност и везу сабирања и одузимања; и најважније, да ученици одузимање готово једино разумеју као инструкцију *одузми* (одвој, уклони). Слично, истраживања су показала (Selter et al., 2012) да деца имају уско схватање операције одузимања, а то доводи до тога да имају потешкоћа са рачунањем, посебно „у глави“.

Карпенер и сарадници су испитивали везу између осмишљавања алтернативних стратегија рачунања и разумевања декадног бројевног система (Carpenter et al., 1998). На основу тестова су поделили ученике у три групе и пратили их током три године: 1) група алтернативних стратегија – ученици који су и за сабирање и за одузимање користили алтернативне, сопствене стратегије и пре него што су уведени стандардни поступци рачунања; 2) група алтернативног сабирања – ученици који су користили алтернативне стратегије за сабирање пре стандардних алгоритама, али нису такве стратегије користили и за одузимање (јер се показало да знатан број деце припада овој категорији) и 3) група стандардних алгоритама – ученици који су користили стандардне алгоритме пре алтернативних стратегија (ако су уопште икада користили алтернативне стратегије). Резултати показују да ученици из групе алтернативних стратегија и даље користе алтернативне стратегије (након систематске обраде стандардних алгоритама), а трећа група само када испред себе нема папир и оловку (и то само у малом броју). На крају, закључено је да ученици заиста могу да самостално изграде алтернативне стратегије рачунања. Аутори закључују да су ученици који су самостално развили алтернативне стратегије пре систематског усвајања стандардних алгоритама показали боље разумевање декадног броје-

вног система, односно појмова који леже у његовој основи, могли су да прошире своје знање и примене га на различитим проблемима и ситуацијама, као и да врше трансформације израза.

Међутим, мана овог истраживања је у томе што се не бави и другим аспектима који доприносе (не)разумевању, као што су, на пример, инструкције учитеља и активности у настави, уџбеници и слично. Питање које нас посебно интересује јесте како би ученици реаговали да су алтернативне стратегије биле предмет системске обраде на часовима математике. Аутори истраживања су мишљења да би увођење алтернативних стратегија негативно утицало на квалитет разумевања и коришћења, претпостављају да би то само поспешило учење напамет, без правог разумевања, односно да би их ученици разумели на исти начин као и стандардне алгоритме. Мишљења смо, као и неки други аутори (Torbayns et al., 2009), да то не мора да буде тачно и да је важно упознати ученике са различитим стратегијама и дати им прилику да их користе, а не кажњавати употребу. Такође, можемо поставити питање како су увођене стандардне стратегије и у ком степену су их разумели ученици.

Правила сјалности збира и разлике као основа сјрашетије рачунања. Основу различитих стратегија и поступака рачунања представљају правила аритметике. Фјусон и сарадници су коришћење аритметичких правила за осмишљавање стратегија рачунања окарактерисали као „теореме у акцији“ (Fuson et al., 1997: 150).

У нашем образовном систему разликујемо три вида изражавања аритметичких правила (Marjanović, 1996):

1. процедурално изражавање – изражававање од примера до примера, у посебним случајевима, у виду исправних спровођења истих процедура;
2. реторичко изражававање правила – изражававање правила речима, коришћењем

термина (тако да се види одговарајућа веза и однос);

3. формулско (симболичко) изражававање – коришћење симбола за изражававање закона.

Процедурални вид изражавања први је и најважнији у почетној настави математике (Zeljić, 2007; Marjanović, 1996), али постоје и тумачења овог вида изражавања са негативном конотацијом, у смислу коришћења алгоритама без разумевања. Међутим, ако су активности и примери којима се ученици воде ка примени правила добро одабрани и дати структурисано, такви да поспешују разумевање, онда се може говорити о правом разумевању које води даљем усвајању знања и тада говоримо о процедуралном изражавању са позитивном конотацијом (Zeljić, 2007). Реторичко изражававање правила значи и да су ученици способни да речима објасне значење правила, а то је често процес са којим ученици имају тешкоће. Ученицима често недостаје језик којим могу да изразе и уопште правила, то јест они могу да их разумеју и идентификују, али не и искажу речима и тако их одреде (Cooper & Warren, 2011). Купер и Ворен наглашавају важност да ученици сами покушају да уопште правила речима, а не да им се дају као готова решења (Warren & Cooper, 2003). Настава аритметике се не своди само на рачунање, већ је њен циљ и развијање основе за уопштавање и генерализацију, а то је од посебног значаја за развој алгебарског мишљења (Marjanović, 1996; Zeljić, 2007). Истраживања су показала да ученицима представља проблем прелазак са аритметичког на алгебарско мишљење и да имају потешкоћа да апстрахују структуре које леже у основи аритметике (Cooper & Warren, 2011; Warren & Cooper, 2003; Zeljić, 2008; Zeljić, Dabić 2014). Иако ученици успешно рачунају, при томе трансформишу изразе и проводе сложене поступке рачунања, знају (изолована) правила аритметике, та знања ипак често не представљају кохерентан систем

који одликује фундаментално разумевање. Један од начина да се наведени проблем превазиђе (Cooper & Warren, 2003; Stevanović i sar., 2014) јесте то да се ученици што више укључе у процес уопштавање знања, да се њихова пажња фокусира на појмове и структуре који представљају значење правила аритметике и на њима заснованих поступака рачунања. Такве активности морају бити вођене са јасним циљем да се експлицитно апстрахују аритметичке структуре.

У нашој образовној пракси правила сталности збира и разлике се до четвртог разреда основне школе системски изучавају, и то кроз сва три вида изражавања, док се у страном литератури (Carpenter et al., 1998; Fuson et al., 1997; Torbeyns et al., 2009) правила спомињу и користе као стратегија у рачунању, без експлицитног издвајања и представљања овог правила. Правило називају *сйрашјеијом компензације*.

Сйрашјеија компензације при сабирању и одузимању је погодна за коришћење у примерима у којима се бројеви завршавају цифрама јединица 8 или 9. Правило компензације се огледа у следећим примерима: $54 + 19 = (54 + 20) - 1 = 74 - 1 = 73$, $62 - 38 = (62 - 40) + 2 = 22 + 2 = 24$.

Наведене једнакости представљају процедурално изражавање правила. Правило се примењује иако се не осмишљава као посебан појам, то јест изостаје реторичко и симболичко изражавање.

Истраживање Карпентера и сарадника (Carpenter et al., 1998) показало је да од ученика који су интуитивно развили алтернативне стратегије сабирања и одузимања ниједан није користио стратегију компензације за сабирање, а само мали број при одузимању. С обзиром на то да су поступци одузимања тежи за ученике од поступака сабирања (Selter et al., 2012), можемо да закључимо да комплексност проблема наводи ученике да користе стратегије које ту комплексност смањују. Међутим, када им је стратегија објашњена на хипотетичком задатку, знат-

но већи број ученика је користио наведену стратегију као свој начин при рачунању. У истраживању које се бавило испитивањем неформалних стратегија рачунања (Torbeyns et al., 2009) посебна пажња посвећена је стратегији компензације. Аутори су истраживали да ли заиста – како је једно друго истраживање показало (Shrager & Siegler, 1998) – ученици могу спонтано да развију стратегију компензације при рачунању, иако то није било предмет систематске обраде. У наведеном истраживању требало је одабране примере (изразе) што брже израчунати и објаснити како се дошло до решења, а на другим примерима дати различите стратегије рачунања. Резултати су показали (слично као и код: Carpenter et al., 1998) да су само јако успешни ученици, као и старији ученици, спонтано развили ову олакшицу у рачуну (али не у великом броју). Остали су користили само стратегије научене у школи (а које одговарају нашем поступку усменог и писменог сабирања и одузимања). Аутори, истичући значај правила, предлажу да се ове стратегије уведу у наставу или да се ученици више подстичу да користе олакшице у рачунању, јер у супротном неће сви генерисати алтернативне стратегије, а то, како су доказали, не зависи само од искуства при рачунању већ и од социокултурне средине, што је ово истраживање и показало. Ученици, наиме, користе оне стратегије и поступке који се вреднују као добри, а учитељи не прихватају друге поступке осим оних које прописују курикулуми. Тек понеки учитељи ће их прихватити уколико су сигурни да су ученици добро савладали прописано, а неки ће чак и казнити коришћење других стратегија. Ученици који раде у друкчије оријентисаним условима, таквим да се подстиче проблемско решавање задатака, стимулише развој стратегија и води дискусија о свему томе, могу да осмисле и примењују широк степен формалних и неформалних стратегија у рачунању (Cai, 2006; Torbeyns et al., 2009), што је велики показатељ концептуал-

ног разумевања аритметичких правила и поступака рачунања.

Методолошки оквир

Предмет истраживања јесте разумевање и примена правила сталности збира и разлике од стране ученика, а посебан фокус је на коришћењу правила као стратегије рачунања. У Наставном програму објашњава се улога правила аритметике као олакшица у рачунању и основе рачунских поступака (уопштено), али за правила сталности збира и разлике не постоје конкретизована објашњења, што оставља широко поље могућих тумачења.

Циљ истраживања јесте испитивање степена разумевања правила сталности збира и разлике од стране ученика, а разумевање посматрамо као примену наведеног правила у поступцима рачунања.

Из овако постављеног циља произилазе следећи задаци истраживања:

- Испитати да ли су све компоненте знања (реторичко и симболичко изражавање и примена правила као стратегија у рачунању у различитим ситуацијама) подједнако развијене;
- Испитати да ли ученици користе правила као стратегију рачунању на одговарајућим примерима (на тесту: папир-оловка);
- Испитати да ли ученици користе правила као менталну стратегију рачунања („у глави“).

Узорак истраживања чини тридесет и девет ученика четвртог разреда једне београдске основне школе. Коришћена је дескриптивна метода (и у оквиру ње) каузално-неекспериментална метода, којом се, осим утврђивања и описивања педагошких појава и стварности, упоређују

и интерпретирају резултати и открива повезаност појава (Bandur, Potkonjak, 2006).

Технике које су коришћене у истраживању јесу тестирање и интервјуисање (структурисан разговор са ученицима). С тим у вези, формиран је тест са задацима, као и ток разговора са ученицима, односно везани интервју (Bandur, Potkonjak, 2006). Тестом смо желели да проверимо да ли ученици могу да изразе правила реторички и симболички, као и да ли користе стратегију компензације када имају на располагању папир и оловку, а интервјуом када немају. За статистичку обраду коришћен је програм СПСС (SPSS). За испитивање значајности разлика смо користили пост-хок тест за хи-квадрат (Beasley & Schumacher, 1995; Franke & Christie, 2012), а за значајност је коришћена Бонфероне корекција.

Резултати и дискусија

Процедурално, реторичко и симболичко изражавање њ правила. При поређењу успешности ученика на различитим компонентама знања (реторичко изражавање, симболичко изражавање, примена правила као олакшице у рачунању) резултати истраживања показују да постоји статистички значајна разлика успешности ученика у наведеним категоријама (Chi-square test = 15,319; p=0,000).

Табела 1. Поређење успешности на различитим компонентама знања за сталности збира и разлике (Chi-square test, Post-hoc test).

Задатак	Тачно	Нетачно	p
Реторичко изражавање	13 (33,3%)	26 (66,7%)	p=0,000967
Симболичко изражавање	7 (17,9%)	32 (82,1%)	p=0,865010
Примена олакшице у рачуну	0 (0%)	39 (100%)	p=0,000520

Статистичка анализа (Табела 1) показује да су ученици значајно успешнији у реторичком изражавању правила ($p=0,000967$) у односу на друге компоненте, док су статистички значајно најлошије урадили примену правила као олакшице у рачунању ($p=0,000520$). Наиме, тринаест ученика (33,3%) успешно је реторички изразило и правило сталности збира и правило сталности разлике. Правило као олакшицу у рачунању (и за примере са сабирањем и за примере са одузимањем) нико није успешно применио. Поређење успешности ученика приликом симболичког изражавања и примене правила у реалном контексту показало је да не постоји статистички значајна разлика у успешности на наведеним категоријама ($p=0,865010$).

Резултати показују да су ученици статистички најуспешнији код реторичког изражавања правила, док су лошији у уопштавању правила и нарочито у примени правила као олакшице у рачуну. Ови резултати су у супротности са налазима који говоре о тешкоћама реторичког изражавања (Cooper & Warren, 2011; Warren & Cooper, 2003; Zeljić, 2014). Ученици су, статистички значајно, најлошије постигнуће показали у оперативној примени правила. У страног литератури (Fuson et al., 1997; Torbayns et al., 2009) инсистира се на примени ових правила као олакшице (принцип компензације) који, као једна од стратегија рачунања, поспешују не само рачунање већ и структурално схватање израза (Zeljić, 2008) и разумевање декадног система (Carpenter et al., 1998). Како се код нас, у Наставном програму, говори о уопштеној примени правила, без конкретизације, онда нас ови резултати не изненађују. Приметно је да су у првом плану реторичко и симболичко изражавање, а који нису утемељени на адекватним примерима.

Примена правила као олакшице (стирајтеије рачунања) у ситуацији папир-оловка. Задатак на тесту којим смо проверавали како ученици рачунају вредности израза који су погодни

за коришћење олакшице у рачуну произашле из правила сталности збира/разлике гласи:

Изрчунај на најлакши начин:

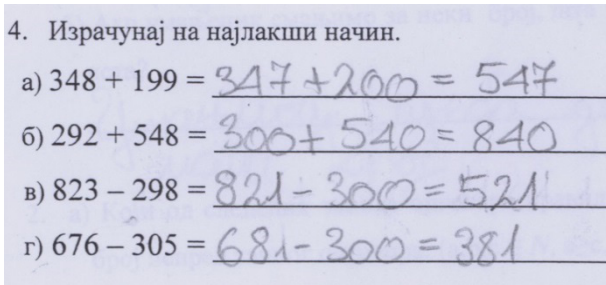
a) $348 + 199 =$ _____

б) $292 + 548 =$ _____

в) $823 - 298 =$ _____

г) $676 - 305 =$ _____

Резултати показују да је само троје ученика (7,7%) у примерима за сабирање и четворо (10,2%) за одузимање користило правила сталности као олакшицу у рачуну када су испред себе имали папир и оловку. Остали ученици су израчунали вредности коришћењем стандардних поступака писменог и усменог сабирања и одузимања, а за два ученика нисмо могли да одредимо поступак рачунања. Када посматрамо ученике који су користили стандардне алгоритме, њих 85,5% је тачно решило задатке, што је висок проценат. Дакле, ове стратегије јесу ефикасне у оваквим ситуацијама, у смислу тачног рачунања, али можемо поставити питање да ли су адекватне. Сви ученици који су користили олакшицу у примерима сабирања су тачно решили задатке, али како је узорак мали (по троје ученика), не можемо говорити о статистички значајној разлици. Занимљиво је да су сва три ученика која су тачно, применом олакшице, израчунали задатак са сабирањем, нетачно су решили, применом олакшице, оба примера са одузимањем. Двојица ученика нису уочила знак минус, односно да су трећи и четврти пример заправо примери одузимања, док је један ученик исправно уочио одузимање, али је направио грешку, такву да је додао умањенику 2 и исто одузео од умањеноца у 4. задатку под в), односно додао и одузео 5 у 4. задатку под г), а требало је додати 2, то јест одузети 5 од оба (Слика 1).



Слика 1. Пример грешке у 4. задатку
под в) примене олакшице за задатке са
одузимањем.

Ово је очекивана процедурална грешка која показује да не постоји дубље разумевање значења операције одузимања (Cooper & Warren, 2011; Fuson et al., 1997; Selter et al., 2012).

Само један ученик од њих тридесет и девет је, применом правила, успешно решио пример са одузимањем (пример под в), док је остала три примера успешно решио применом стандардног писменог поступка.

Из свега наведеног, закључујемо да ученици не користе принцип компензације (примена правила сталности збира и разлике) као олакшицу у рачуну када испред себе имају папир и оловку.

Ниједан ученик није успешно искористио олакшицу и за сабирање и за одузимање иако су то погодни примери. Међутим, узорак је изузетно мали, па не можемо закључити да је стратегија неодговарајућа у папир-оловка ситуацијама, већ можемо претпоставити да су ученици сигурнији у писмено или усмено рачунање када могу да запишу примере, а разлог за то је што само такве стратегије и користе (Baranes et al., 1989). С обзиром на то да Наставни програм предвиђа коришћење правила сталности збира и разлике као олакшице, број ученика који их користи је незнатан. Ако немају подршку наставника да користе алтернативне стратегије, ученици их неће ни користити (Cai, 2006; Torbayns et al., 2009).

Примена правила као олакшице у ситуацији без папира и оловке (ментално рачунање).

Како ученици примењују правило у ситуацијама које нису оловка-папир, а када је примена правила веома погодна, проверили смо кроз интервју са ученицима.

Интервју је трајао је око пет минута са сваким учеником понаособ, а изводило га је двоје испитивача. Интервју је био структурисан, а направљен је аудио-запис разговора. Испитивач је почео разговор са учеником, питавши га за име и за тест који је претходно рађен, како би припремио ученика за даљи разговор. Затим је испитивач рекао испитанику да ће добити два израза, један са сабирањем и један са одузимањем, биће записани на папиру, а да је задатак ученика да срачуна вредност тих израза „у глави“, без папира и оловке. Након тога испитивач је тражио од ученика и да објасни како је до резултата дошао.

Сви одговори су категорисани у једну од категорија наведених у табелама. Само прва категорија подразумева нетачан резултат. Категорије писмени поступак и усмени поступак означавају вршење одређених алгоритама „у глави“, без записивања. Фреквенција датих одговора на интервјуу представљена је у Табели 2 за пример сабирања, и у Табели 3 за пример одузимања.

Табела 2. Процентни датих одговора ученика на интервјуу, пример сабирања.

Одговор	F	%
Неуспешно израчунавање	2	5,1%
Коришћено правило, свестан примене	2	5,1%
Коришћено правило, несвестан примене	4	10,3%
Писмени поступак рачунања	28	71,8%
Усмени поступак рачунања	3	7,7%
N =	39	100%

Табела 3. Процентни дајих одговора ученика на интјервјуу, йримјер одузимања.

Одговор	F	%
Неуспешно израчунавање	2	5,1%
Коришћено правило, свестан примене	2	5,1%
Коришћено правило, несвестан примене	3	7,7%
Писмени поступак рачунања	27	69,2%
Усмјени поступак рачунања	4	10,3%
Друго – индиректно сабирање	1	2,6%
N =	39	100%

Резултати представљени у Табели 2 и Табели 3 показују да, када ученици испред себе немају папир и оловку, више користе олакшицу у рачуну. Њих шест (15,4%) користило је олакшицу за сабирање, дупло више него када су имали папир и оловку испред себе. А њих пет (12,8%) олакшицу за одузимање. Укупно је седам ученика (17,9%) користило бар једном олакшицу. Оно што нас је посебно занимало јесте да ли ученици знају да су користили сталност збира/разлике као олакшицу (уколико су је користили), па је додатно питање испитивача, уколико су ученици користили правило, било: „Да ли знаш које си правило користио/ла како би израчунао/ла?“. Двоје ученика (оба примера) знали су да су користили правило сталности збира/разлике, остали нису. Занимљиво је да је двоје ученика код одузимања направило сличну грешку у примени правила, као у задатку на тесту, пре него што су се исправили. Једна ученица је код одузимања користила још једну познату алтернативну стратегију (о којој смо говорили у теоријском делу), а то је индиректно сабирање.

У току истраживања испитивачи су приметили неколико ствари. Прво, деца су се „бу-

нила“ што немају пред собом папир и оловку за израчунавање, али су ипак покушали да израчунају. Друго, уколико су ученици користили писмени поступак рачунања (крећући од сабирања/одузимања јединица ка стотинама), често су грешили (седамнаест ученика (43,6%) барем на једном примеру направило је грешку у рачунању), први број који су рекли као одговор није био тачан, а обично је грешка била у томе да су изоставили прелазак преко десетице или стотине. То је очекивана грешка јер је овакав поступак прилично комплексан за рачунање без записивања. Током објашњавања поступка рачунања већина њих је увидела грешку и исправила се. Само двоје ученика није успело ни на који начин у потпуности да израчуна вредности израза. Остали ученици су израчунали вредност израза, а уколико су направили грешку, или би је сами уочили током објашњавања или им је испитивач скретао пажњу на грешку и молио их да поново срачунају. Треће, одређени број ученика је имао велике потешкоће да каже који је број добио као резултат. Говорили би два-два-три-пет (за 2235). Дакле, нису били у стању да одреде месну вредност сваке цифре и требало им је времена да би, на инсистирање испитивача, изговорили број. Још једна потешкоћа је била да су говорили цифре „уназад“, крећући се од јединица ка стотинама, и такође им је било потребно време да „обрну“ цифре и кажу резултат (шест-нула-четири за 406). Четврто, током објашњавања поступка рачунања, ретко који ученик је користио изразе попут „сабирао сам јединице са јединицама...“ или слично, већ је објашњавао на конкретном примеру.

Резултати потврђују нека претходна истраживања (Torbeuens et al., 2009) – да ученици ретко користе алтернативне стратегије када имају папир и оловку, а да их више користе (са 7,7% на 15,4% за сабирање; са 10,2% на 15,4% за одузимање) када немају папир и оловку испред себе (Табела 2 и Табела 3). Међутим, како је у питању мали узорак, на основу резултата не може-

мо говорити о јасној тенденцији коју показују ученици у Србији, али можемо указати на могући проблем који би јасније био сагледан кроз истраживање спроведено на већем узорку.

Закључак

Можемо закључити да ученици правила збира и разлике познају на реторичком нивоу. Услед недовољног разумевања правила, слабији су у симболичком изражавању и уопштавању, али та разлика није статистички значајна. Како су ова правила системски изучавана, може се очекивати и њихова примена у адекватним ситуацијама (Cai, 2006; Torbayns et al., 2009), али у тој компоненти знања ученици су имали значајно најлошија постигнућа. У задатку у којем је било дозвољено коришћење папира и оловке ученици користе стратегије са којима се осећају најсигурнијим и заиста јесу успешни у томе, али не иду даље од тога. Не осећају да је нека друга стратегија можда погоднија, већ сматрају да је позната и сигурна стратегија најлакши начин рачунања (Varanes et al., 1989).

Успешност коришћења стандардних поступака значајно опада када морају да рачунају без папира и оловке (са 85,5% на 56,4%). То доводи до закључка да ученици не поседују одговарајући степен процедуралне флуентности (Kilpartick et al., 2001; Torbeyns et al., 2009), јер да је поседују, били би у стању да добро рачунају и помоћу папира и оловке и „у глави“. Посебно је лоше што су дати примери врло погодни за коришћење правила компензације. Споро, неефикасно рачунање постаје препрека разумевању јер се фокус помера са задатка на рачунање (Kilpartick et al., 2001; Warren & Cooper, 2003).

Познавање и коришћење различитих стратегија не само да представља помоћ при рачунању него је њихов значај и у томе што помоћу њих ученици боље разумеју структуре израза, и примена тих стратегија јесте и „теорема у акцији“ (Fuson et al., 1997: 150), односно аритметичка правила се стављају у примену, увежбавају се, а то доприноси да се и боље разумеју, а све ради бољег разумевања декадног система, операција и саме аритметике. Без процедуралне флуентности неће бити могуће развити ни друге „нити“ математичке писмености (концептуално разумевање, стратегијске и продуктивне способности, прилагодљиво расуђивање), а посебно не концептуално разумевање (Kilpartick et al., 2001; Rittle-Johnson & Schneider, 2015; Skemp, 1993). Ово представља велики недостатак и захтева промене у начину обраде и утврђивања ових правила. Ипак, неким ученицима је након интервјуа показан начин рачунања применом правила компензације и они су се сложили да је такав начин „лакши“ и питали су се зашто се они тога нису сетили.

Резултати нашег истраживања показују да знање ученика о правилима сталности збира и разлике није оперативно, то јест да ученици нису у могућности да га примене у одговарајућим ситуацијама. Могуће решење овог проблема видимо у конкретизацији методичких упутстава у Наставном програму, што би представљало јасније смернице, како учитељима, тако и ауторима уџбеника. Промене у програмима и уџбеницима помогле би развој методичких поступака учитеља којима се подстиче разумевање и адекватна примена правила као олакшице у рачунања, што води развијању различитих стратегија рачунања и развоју математичке писмености.

Литература

- Bandur, V., Potkonjak, N. (2006). *Istraživački rad u školi: akciona istraživanja*. Beograd: Školska knjiga.
- Baranes, R., Perry, M. & Stiegler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*. 6 (4), 287–318.
- Beasley, T. M. & Schumacker, R. E. (1995). Multiple regression approach to analyzing contingency tables: Post hoc and planned comparison procedures. *The Journal of Experimental Education*. 64 (1), 79–93.
- Cai, J. (2006). U. S. and Chinese teachers' cultural values of representations in mathematics education. In: Leung F. K. S., Graf K. D. & Lopez-Real F. (Eds). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asian and the West* (46–482). New York, NY: Springer.
- Carpenter, T. P., Franke M., Jacobs, V., Fennema E. & Empson S. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (1), 3–20.
- Cooper, T. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory. In: Cai, J. & Knuth, E. (Eds). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (187–214). Netherlands: Springer.
- Franke, T. H., Ho, T. & Christie, C. A. (2012). The Chi-Square Test: Often Used and More Often Misinterpreted. *American Journal of Evaluation*. 33 (3), 448–458.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 28 (2), 130–162.
- Kilpartick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds). (2001). *Adding it up: Helping children learn methematics*. Washington, DC: Netional Academy Press.
- Marjanović, M. (1996). *Metodika matematika II*. Beograd: Učiteljski fakultet.
- Marjanović, M. (2004). *Priručnik uz udžbenik iz matematike za 2. razred osnovne škole*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- Milinković, J., Zeljić, M. (2014). Računanje. U: *Leksikon obrazovnih termina* (669–670). Beograd: Učiteljski fakultet.
- Peltenburg M., Heuvel–Panhuizen, M. & Robitysch, A. (2012) Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100–A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*. 79 (3), 351–369.
- Popović, S. (1878). *Računica za osnovne škole za I i II razred*. Beograd: Državna štamparija.
- Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In: Kadosh, R. C. & Dowker, A. (Eds). *Oxford handbook of numerical cognition* (1102–1118). Oxford University Press.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2012). Taking away and determing the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse reletion to addition. *Educational Studies in Mathematics*. 79 (3), 389–408.

- Shrager, J. & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science*. 9, 405–410.
- Skemp, R. (1993). *Mathematics in the Primary School*. London: RoutledgeFalmer.
- Stevanović, S., Crvenković, S., Romano D. (2014). Jedan primjer analize aritmetičkog i ranoalgebarskog mišljenja. *Inovacije u nastavi*. 27 (1), 118–134. doi:10.5937/Inovacije14011185
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*. 71, 1–17.
- Warren, E. & Cooper, T. (2003). Arithmetic pethways towards algebraic thinking: Exploring arithmetic compensation in year 3. *Australian Primary Mathematic Classroom*. 8 (4), 10–16.
- Zeljić, M. (2007). *Načini izražavanja procedura i pravila aritmetike*. Beograd: Učiteljski fakultet.
- Zeljić, M. (2008). Razlike aritmetičkog i algebarskog pristupa i mogućnosti algebarizacije osnovnoškolske aritmetike. U: Radovanović, I. i Radović, V. Ž. (ur.). *Inovacije u osnovnoškolskom obrazovanju – od postojećeg ka mogućem: zbornik radova* (208–2018). Beograd: Učiteljski fakultet.
- Zeljić, M., Dabić, M. (2014). Odnos proceduralnog i konceptualnog znanja učenika u procesu ovladavanja postupcima računanja u početnoj nastavi matematike. *Nastava i vaspitanje*. 63 (4), 653–668.

Summary

Developing skills of calculating is one of the primary tasks of initial Arithmetic teaching. Fulfilling calculating skills is one of the basic aims of initial Arithmetic teaching. Fulfilling this task means that students should be able to choose a suitable method in calculating. The most convenient strategy depends on the characteristic of numbers in an expression, age of students and situation in which it is being calculated. Students, who have a high degree of understanding the relation between addition and subtraction, characteristics of the decade number system and rules which describe it (arithmetic rules), show more flexibility in choosing adequate strategies of calculating. The aim of the research is studying aims and degrees of understanding sum and difference compensation strategy by the students and this kind of understanding is seen as an application of the stated rules in the procedures of calculating. The sample of the research is consisted of 39 fourth grade students of a primary school in Belgrade. Descriptive method was used, as well as techniques of testing and interviewing. Results of the research show that that knowledge of students about the examined rules is not operational, i.e. the students cannot apply it in suitable situations. Students apply strategies based on the stated rules more often as a mental strategy than in the situation paper-pen, but the analysis shows that students are not flexible in choosing the suitable strategy. Possible solution of this problem lies in concretization of methodological instructions in the Curriculum, and this would make clearer directions to both teachers and authors of the course books.

Key words: *Sum and difference compensation strategy, calculating strategies.*