UDK 371.3::514
159.953.5

Иновације у настави, XXXII, 2019/1, стр. 64–74
doi:10.5937/inovacije1901064Z

Рад примљен: 8. 11. 2018.
Рад прихваћен: 15. 3. 2019.

Оригинални научни рад

Маријана Ж. Зељић[1]
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Милица Р. Иванчевић
ОШ „Кнез Сима Марковић", Београд

Алгоритамски и концептуални приступ мерењу површине фигура[2]

Резиме: *Мерење површине представља важну тему школских програма и тесно је повезана са другим математичким темама и са реалним окружењем. Резултати бројних међународних студија показују да су постигнућа ученика у домену мерења површине ниска, што се повезује са алгоритамским приступом наведеној теми, а који карактерише доминантно наглашавање процедуралних вештина и примена формула. У раду су разматрани различити нивои и параметри концептуалног разумевања мерења површине. Циљ истраживања јесте испитивање нивоа и карактера знања о мерењу површине код ученика четвртог разреда основне школе. У истраживању су коришћене дескриптивна метода и техника тестирања. Тест чине стандардизовани задаци (Huang & Witz, 2013) и још два задатка која нису део стандардизованог теста и која су осмишљена на основу транскрипта интервјуа из наведеног истраживања. Узорак је пригодан и чине га два одељења четвртог разреда једне основне школе у Београду. Основни закључак јесте да су ученици развили инструментално разумевање поступка мерења површине и да стратегије одређивања површине фигура своде на примену формула, због чега често греше, бирајући погрешну формулу. Као импликацију истраживања видимо истицање потребе да се довољно времена посвети активностима концептуалног приступа подели фигура и поплочавању које ће премостити велики јаз од поплочавања површи и бројања јединица мере до разумевања формула за рачунање.*

Кључне речи: *мерење, површина фигуре, алгоритамски и концептуални приступ.*

1 marijana.zeljic@uf.bg.ac.rs

2 Рад представља резултат рада на пројекту „Концепције и стратегије обезбеђивања квалитета базичног образовања и васпитања", број 179020, Учитељског факултета у Београду.

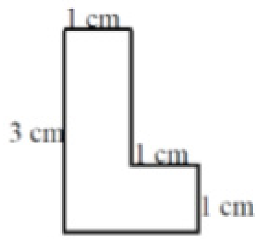
Теоријске основе

Мерење површине је део школске математике и блиско је повезано са применом математике у реалном окружењу. Оцене математичких постигнућа ученика, међутим, показују да ученици у основној школи имају ниска постигнућа на задацима мерења површине (Martin & Strutchens, 2000; Lin & Tsai, 2003; Jelić, Đokić, 2017). Истраживачи сугеришу да нефлексибилност коју ученици показују у задацима са мерењем површине може бити резултат наставног програма школске математике (Strutchens et al., 2001). У литератури се издвајају два фактора која негативно утичу на разумевање градива код ученика: 1) алгоритамски/нумерички приступ израчунавању је доминантан у наставној пракси (Tan, 1995; Tan, 1999; Huang & Witz, 2013) и 2) недостатак везе између 2Д геометрије и мерења површине приказаних у наставним материјалима (Stephan & Clements, 2003; Kordaki & Balomenou, 2006). Хуанг и Виц (Huang & Witz, 2011) истичу да су истраживања у различитим земљама, као што су Италија, Грчка, Тајван и САД, показала да наставници у пракси углавном примењују алгоритамски/нумерички приступ мерењу површине, који подразумева наглашавање процедуралних вештина и примену формула уместо разумевања како и зашто формуле функционишу. Слично, Стефан и Клементс (Stephan & Clements, 2003) наводе да ученици најчешће уче да рачунају површину правоугаоника тако што множе мерне бројеве страница. Ова инструкција је збуњујућа јер се 2Д површ не може једноставно разумети множењем мерних бројева дужине и ширине. Да је разумевање појма површи ограничено на примену формуле, показује и чињеница да ученицима недостаје разумевање како се могу сагледати површине троуглова или паралелограма у односу на површину правоугаоника (Tan, 1999). Резултати бројних истраживања сугеришу да постоји велики „когнитивни скок" од преласка са бројања квадрата којим се нека фигура поплочава до концептуалног разумевања формуле (Van de Walle, 2007). Разумевање појма површине захтева учење и координацију више појмова и поступака, што је когнитивни изазов за ученике (Battista, 2004; Clements & Stephan, 2004; Battista, 2007). Основни појмови за разумевање површине укључују поплочавање фигуре без празнина или преклапања јединица, дељење површи на једнаке јединице мере, бројање мерних јединица, разматрање комбинованих јединица мере, разумевање структуре редова и колона и повезивање броја квадрата по дужини и ширини (Battista, 2007; Sarama & Clements, 2009). При почетном мерењу површине циљ је развијати идеју да се површина мери покривањем или поплочавањем (Van de Walle, 2007). Студије су показале да је концептуално разумевање површине у нижим разредима основне школе дуготрајан процес и да су грешке ученика честе (Outhred & Mitchelmore, 2000; Battista, 2004; Battista, 2007; Sarama & Clements, 2009). Ученици често користе неједнаке јединице мере, остављају празнине или постоје преклапања јединица мере (Outhred & Mitchelmore, 2000; Battista, 2004). Резултати истраживања показују (Battista & Clements, 1996; Battista et al., 1998) да је потребно време да ученици развију способност поплочавања или поделе површине без празнина или преклапања и да на крају повежу структуре редова и колона са мерењем површине. Инструменти и поступци који се користе у активностима поплочавања не показују увек директно својства множења (Van de Walle, 2007). Ако ученици нису поступно вођени кроз процес истраживања, они неће бити у могућности да разумеју структуру површи директно кроз поплочавање. Разумевање структуре редова и колона критична је идеја у учењу мерења површине, јер, када једном ученици разумеју и визуелизују структуру површи (у односу на мерну јединицу), они могу повезати структуру са формулом површине (Battista et al., 1998; Battista, 1999; Schifter et al., 2002; Kamii & Kysh, 2006; Zacharos, 2006; Sarama

& Clements, 2009; Đokić, 2014). Коришћење формуле без разумевања зашто је валидна води грешкама као што су мешање формула за површину и обим, примена формуле за погрешну фигуру и сл. Када ученици науче да рачунају површину користећи концептуалне приступе подели фигура и поплочавању (дељење фигуре на једнаке јединице, поплочавање дате површине јединицама једнаке величине и уочавање структуре низа), они ће развити боље разумевање мерења површине других фигура (Outhred & Mitchelmore, 2000; Zacharos, 2006; Huang, 2017).

Један број истраживача имао је за циљ идентификовање нивоа и карактеристика фаза које ученици пролазе при развијању и разумевању геометријских појмова и појма мерења. Описивање карактеристика хијерархије тих нивоа представља вредно средство наставницима и истраживачима које се може користити при истраживању ученичког разумевања. Кав и Џио (Kow & Yeo, 2008) издвојили су следеће нивое: 1) Коришћење одговарајуће формуле и рачунање површине правоугаоника и квадрата; 2) Одређивање свих могућих површина правоугаоника и квадрата када је дат обим; 3) Одређивање димензија правоугаоника и квадрата када је дата површина и друга димензија; 4) Решавање текстуалних проблема који укључују површину правоугаоника и квадрата; 5) Рачунање површине правоугаоника и квадрата ментално; 6) Рачунање површине сложених фигура састављених од правоугаоника или/и од квадрата; 7) Решавање нетипичних проблема који укључују површину сложених фигура.

Усискин (Usiskin, 2012) такође је издвојио нивое разумевања мерења површине и обима. Сматрао је да постоји више аспеката или типова разумевања, које назива димензије разумевања: 1) Избор одговарајућег алгоритма (формуле) за израчунавање површина или обима дате фигуре; 2) Ученик зна шта ради и зашто то ради: познавање односа између површине и обима исте фигуре; 3) Моделовање: препознавање површине и обима у свакодневним животним проблемима; 4) Репрезентација – метафора разумевања: ученици су способни да представе појмове површине и обима (површину подударним плочицама, обим – дужина ограде). Усискин сматра да су димензије међусобно независне, као и да ниједна димензија не мора да претходи другој. Потпуно разумевање подразумева познавање више независних компоненти које заједно чине целину. Разрађујући наведену класификацију, Херендине-Коња (Herendine-Konya, 2015) спровео је истраживање у којем је акценат ставио на прву и четврту димензију. Истраживање је спроведено у Мађарској, са ученицима од петог до осмог разреда. На основу истраживања закључено је да ученици не разумеју довољно појам површине, као и да, како се повећава узраст, разумевање опада, уместо да расте у складу са проширивањем и продубљивањем знања (исто). На пример, на задатку у којем је требало израчунати површину и обим сложене фигуре (Слика 1) проценат тачних одговора у свим разредима је био мањи од 40%. Резултати су показали и да су ученици петог разреда најуспешнији у решавању, будући да је 40% њих тачно решило задатак.



Слика 1. Рачунање површине и обима сложене фигуре (Herendine-Konya, 2015).

Истраживање Хуанга и Вица (Huang & Witz, 2013) имало је за циљ испитивање разумевања површине и стратегија за израчунавање површине код млађих ученика (четврти разред). Разумевање површине испитано је помоћу задатака којима се испитују следећи параметри:

1) Поседовање представе о површини;
2) Способност објашњења значења формуле;
3) Способност разликовања мерења обима и површине;
4) Коришћење стратегија за израчунавање површине;
5) Самостално именовање геометријских фигура;
6) Идентификација и самокорекција погрешног решења.

Резултати су показали да ученици који имају потпуну представу о површини могу да објасне значење формуле, разликују мерење обима и мерење површине, користе различите стратегије за израчунавање површине, идентификују и именују геометријске фигуре и самостално коригују своје грешке (Huang & Witz, 2013).

Концептуално разумевање мерења површине шире је од знања и примене формуле у решавању текстуалних задатака. Мерење површине подразумева активности које су засноване на истраживању кроз решавање проблема и које подстичу ученике да размишљају и откривају стратегије поплочавања и рачунања површине различитих фигура.

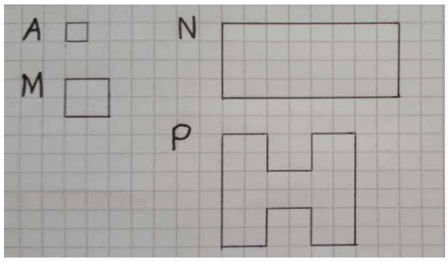
Методолошки оквир истраживања

Циљ овог истраживања јесте да испитамо ниво и карактер знања о мерењу површине код ученика четвртог разреда основне школе. Као основне индикаторе знања ученика користили смо параметре које су дефинисали Хуанг и Виц (Huang & Witz, 2013): разумевање појма површине, способност објашњења значења формуле, способност разликовања обима и површине, стратегије за израчунавање површине, способност идентификације погрешног решења. У истраживању су коришћене дескриптивна метода и техника тестирања. У сврху истраживања користиће се модификовани задаци који су коришћени у истраживању (Huang & Witz, 2013). Како су разумевање појма површине и разликовање појмова обима и површине у наведеном истраживању испитивани путем интервјуа, а ми смо се определили за тест као инструмент, на основу транскрипта интервјуа осмислили смо одговарајуће задатке. Узорак чине два одељења (четрдесет и пет ученика) четвртог разреда једне основне школе у Београду. Будући да је истраживање захтевало сарадњу и пристанак учитеља, узорак је пригодан. Одабрани су ученици четвртог разреда, будући да су они у текућој школској години обрадили садржаје у вези са површином геометријских фигура и тела. Истраживање је спроведено у мају, када су већ обрађени сви програмски садржаји који се односе на мерење површине.

Интерпретација резултата истраживања

Први задатак овог истраживање био је да се утврди да ли ученици разумеју појам површине кроз идеју о поплочавању и гласи:

На скици су приказане фигуре N и P и јединице мере – фигуре A и M.



Одреди површине фигура N и P најпре јединицом мере A, а затим јединицом мере M.

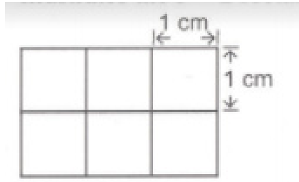
Добијене резултате унеси у табелу.

Јединица мере	*Површина фигуре*	
	N	*P*
A		
M		

Наведени задатак тачно је решило двадесет и деветоро ученика (64,4%), дванаесторо ученика (26,7%) дало је нетачан одговор, а четворо (8,9%) ученика није покушало да реши задатак. Упоређивање површи са датом мерном јединицом први је и основни корак ка разумевању мерења површине (Battista, 2007; Van de Walle, 2007; Sarama & Clements, 2009) и представља основу за даље развијање знања и способности мерења површине различитих фигура. Ученици који нису тачно решили задатак покушавали су да примене одређене формуле за рачунање површине. Када су одређивали површину фигуре *N*, мерећи је мерном јединицом А, сви ученици су дали тачан одговор, јер се одговор добија множењем мерних бројева страница. Да бисмо проверили да ли ученици разумеју идеју површине кроз активност поплочавања, сматрали смо да ученици морају бити способни да фигуре упоређују са различитим мерним јединицама (Battista, 2007; Sarama & Clements, 2009). У том смислу смо као тачан одговор прихватали само потпуно тачан задатак. Примена формула за рачунање површине у наведеном задатку показује да прерано увођење формула за рачунање површине води ка процедуралној примени без разматрања значења поступака мерења површи (Tan,1995; Tan, 1999; Huang & Witz, 2011; Huang & Witz, 2013). Такав став потврђују и нетачна решења ученика: они су користили различите формуле, па и формулу за рачунање површине квадра, тј. ученици мешају формуле за рачунање површине различитих геометријских облика (Schifter et al., 2002; Kamii & Kysh, 2006; Zacharos, 2006).

Други задатак истраживања је био да испитамо да ли ученици разумеју значење формуле за израчунавање површине правоугаоника. Задатак помоћу којег смо испитивали разумевање је следећи:

Како би објаснио/објаснила значење формуле за израчунавање површине правоугаоника користећи правоугаоник димензија 3 cm и 2 cm?



Сматрамо да слика која је дата уз задатак, а на којој је правоугаоник подељен на cm^2, олакшава задатак и сугерише значење формуле. Резултати показују да ниједан ученик није у потпуности тачно урадио задатак. Више од половине ученика (двадесет ученика, тј. 55,6%) није уопште покушало да одговори на задатак. То показује да ученици нису навикли на ситуације у којима објашњавају значење формула и поступака које примењују и да поступци који се користе у активностима поплочавања не показују увек директно својства множења (Van de Walle, 2004). Троје ученика покушало је да објасни значење формуле кроз идеју о поплочавању, али су нетачно именовали мерну јединицу. Они су написали да „у два реда има по три коцке". Парадигматски одговори су следећи: „Формула представља производ страница", „Производ дужине и ширине", „Зато што се на тај начин рачуна површина". Наведени одговори, осим процедуралног разумевања формуле, показују и непрецизно коришћење математичког језика. Ученици нису писали да множимо мерне бројеве страница, већ да множимо странице. На основу резултата можемо закључити да ученици не поседују концептуално разумевање формуле, тј. не могу да објасне значење формуле коју примењују у задацима. Разумевање значења формуле већина аутора види као значајну компоненту концептуалног разумевања појма површи и мерења површине (Battista et al., 1998; Battista, 1999; Schifter et al., 2002; Kamii & Kysh, 2006; Zacharos, 2006; Sarama & Clements, 2009). Резултати потврђују и чињеницу да постоји велики когнитивни „скок" – од преласка са бројања квадрата којим се нека фигура поплочава до концептуалног разумевања формуле (Van de Walle, 2007), што може имплицирати да је недовољно пажње посвећено разумевању појма површи кроз активност поплочавања.

Трећи задатак истраживања усмерен је на испитивање способности ученика да разликују обим и површину, односно на испитивање способности уочавања ситуације у којој треба израчунати површину. Разликовање ових двају појмова испитано је помоћу следећег задатка:

Ана и Маша су решавале следећи задатак: Мајстор треба да постави ламинат у соби чије су димензије 2 m и 3 m. Колико је ламината потребно да би се прекрио цео под?

Ана је задатак решила на следећи начин: $2 \cdot 2$ m + $2 \cdot 3$ m = 4 m + 6 m = 10 m.

Маша је задатак решила на следећи начин: 2 m $\cdot$ 3 m = 6 m^2.

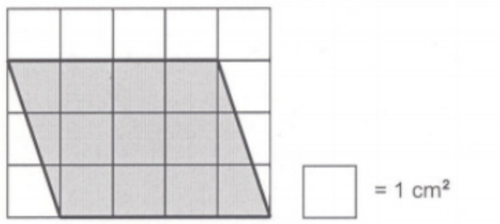
а) Ко је тачно решио задатак? Објасни свој одговор.

б) Шта је девојчица која је погрешила могла да израчуна помоћу једнакости коју је написала?

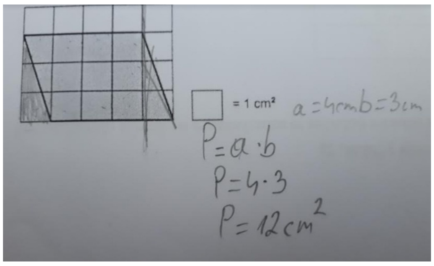
Резултати показују да је само дванаесторо ученика (26,7%) тачно решило задатак у целости. Као што смо и очекивали, ученици који су тачно решили први део задатка били су успешни и на другом делу задатка. Нетачан одговор у првом делу задатка дало је двадесет и деветоро (64,4%) ученика, док је у другом делу мањи број ученика покушао да одговори и дао нетачан одговор (двадесет и троје ученика, односно 51,5%). Резултати на наведеном задатку потврђују ставове (Battista et al., 1998; Battista 1999; Schifter et al., 2002; Kamii & Kysh, 2006; Zacharos, 2006; Sarama & Clements, 2009, Đokić, 2014) да процедурално утемељене формуле без вођеног истраживања од стране учитеља, а које има за циљ утемељивање значења и разумевање формула, води њиховој несистематској и погрешној употреби. Усискин (Usiskin, 2012) посматра димензије разумевања мерења површине и обима кроз способност избора одговарајуће формуле за израчунавање површина или обима дате фигуре и препознавање односа између површине и обима исте фигуре. Наши резултати показују да ученици нису успешни у разликовању површине и обима дате фигуре, па, следећи Усискинове ставове, можемо рећи да не поседују концептуално разумевање површине и обима.

Следећу компоненту разумевања појма мерења површи, коју смо испитивали у нашем истраживању, представљају стратегије рачунања површине других геометријских фигура. Коришћење стратегија, као и њихову тачности, испитали смо помоћу четвртог, петог и шестог задатка на тесту. Четврти задатак на тесту је гласио:

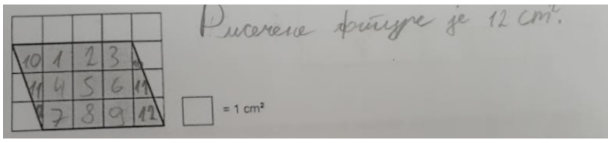
Колика је површина осенчене фигуре?



Од укупног броја ученика чија су решења сврстана у тачна (деветнаесторо ученика - 42,2 %) само је осморо ученика приказало поступак којим се дошло до решења. Међу тим решењима наишли смо на две врсте стратегија. Седморо ученика је од датог паралелограма „правило“ правоугаоник и на тај начин израчунало површину. Пример једног решења (Слика 2) показује да је ученик уочио разложиву једнакост фигура (дату фигуру разложио је на делове који су једнаки деловима друге фигуре и декомпоновањем фигуре дошао до фигуре правоугаоника). Само један ученик је користио идеју поплочавања као стратегију за рачунање површине датог паралелограма (Слика 3). Осталих једанаесторо ученика је само написало коначно решење без икаквог објашњења.



Слика 2. Пример примене стратегије декомпоновања фигуре.

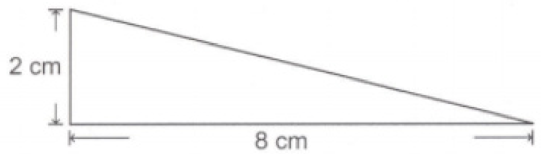


Слика 3. Пример стратегије упоређивања дате фигуре и дате мерне јединице.

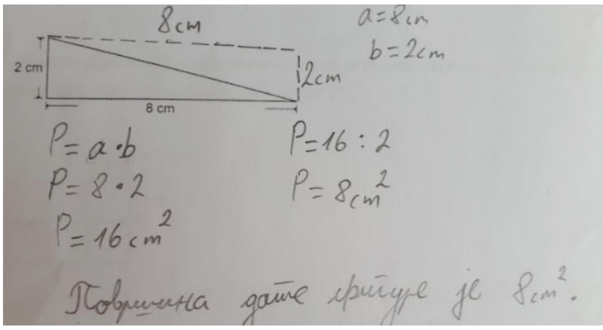
Међу нетачним решењима нашли су се примери у којима су ученици покушали да измере дужину страница дате фигуре, па су те мерне бројеве користили у формулама за израчунавање површине правоугаоника, коцке и квадра (произвољно одређујући трећу димензију).

Коришћење стратегија за израчунавање површине испитивано је и следећим задатком:

Колика је површина дате фигуре? Објасни свој одговор.



За разлику од претходног задатака, у овом постоји једна „отежавајућа“ околност. Наиме, не постоји квадратна мрежа, тј. мерна јединица којом се сугеришу поступак и стратегија рачунања. Успешност ученика на овом тесту је нешто нижа: задатак је решило седморо ученика (15,6%). Као тачне признавали смо и оне одговоре у којима није образложен одговор у писаној форми, али је на основу цртежа закључено да ученици нису насумично дошли до тачног решења. Оваквих одговора је било пет, а један од примера приказан је на Слици 4.



Слика 4. Пример тачно решеног задатка без објашњења.

Само је један ученик у потпуности објаснио свој поступак израчунавања површине и речима: „Само доцртамо и други део правоугаоника, а затим површину правоугаоника поделимо са два.“

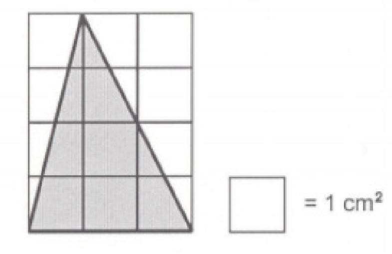
Што се нетачних решења тиче, ученици су правили различите врсте грешака. Најчешћа грешка била је та да су ученици само уписивали коначан, и то нетачан, резултат, без икаквог поступка. Један ученик је покушао да површину датог троугла израчуна помоћу обрасца за израчунавање површине квадра тако што је произвољно одредио трећу димензију. Сматрамо да су лоши резултати на овом задатку последица алгоритамског приступа мерењу површине (Tan, 1995; Tan, 1999; Huang & Witz, 2011; Huang & Witz, 2013) и да се површина правоугаоника не може једноставно разумети множењем мерних бројева дужине и ширине (Stephan & Clements, 2003). Разумевање појма површине подразумева трансфер знања, тј. примену знања у ситуацијама када се рачуна површина других фигура, што подразумева поступке дељења сложених фигура (на фигуре чију површину знају) и допуњавања фигура до фигура чију површину ученици знају да израчунају (Outhred & Mitchelmore, 2000; Zacharos, 2006; Huang, 2017). Концептуално знање појма површине подразумева и знање како се могу сагледати површине троуглова или паралелограма у односу на површину правоугаоника (Tan, 1999).

Способност ученика да идентификују и коригују погрешно решење испитана је кроз следећи задатак:

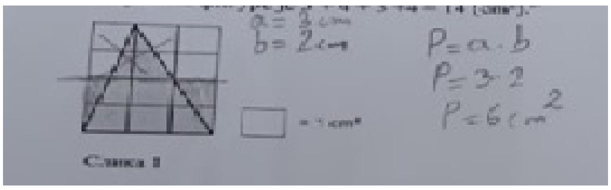
Стефан је добио задатак да израчуна површину осенчене фигуре. Он каже: „Површина фигуре је 3 + 4 + 3 +4 = 14 (cm²).“

а) Да ли се слажеш са његовом идејом? Објасни свој одговор.

б) Како би ти решио/ла проблем?



Само четворо ученика (8,8%) успело је да идентификује и исправи погрешно решење. Што се првог дела задатка тиче, само је један ученик детаљно објаснио свој одговор. Троје ученика је написало да се не слаже са датим решењем, без објашњења, али су зато други део задатка тачно урадили, те смо њихове одговоре прихватили као тачне. Ученици који су тачно урадили други део задатка примењивали су самостално осмишљене стратегије за израчунавање површине. У основи свих решења је разложива једнакост фигура (Слика 5).



Слика 5. Пример стратегије рачунања површине.

Што се нетачних одговора тиче, уочили смо различите врсте грешака. Неки ученици су писали да би урадили исто онако како је понуђено, а неки су записивали једнакости које не одговарају тачном решењу. И на овом задатку показана је тенденција да се површина рачуна несистематском употребом формула за рачунање површине, као и обима правоугаоника који представља квадратну мрежу. Можемо рећи да ученици нису успешни у уочавању, као ни у исправљању погрешног решења. Будући да идентификовање и исправљање погрешног решења представља највиши ниво знања (Huang & Witz, 2013), а у контексту постигнућа на претходним задацима, резултати су очекивани. То свакако не значи да у настави не треба користити овакве типове задатака, већ је потребно помоћи ученицима да знања усвоје са разумевањем и да достигну највиши ниво знања.

Закључак

Анализа резултата међународних истраживања показује да је концептуално разумевање површине у нижим разредима основне школе сложен и дуготрајан процес и да постоји велики когнитивни скок од идеје поплочавања површи до концептуалног разумевања формуле (Outhred & Mitchelmore, 2000; Battista, 2004; Battista, 2007; Sarama & Clements, 2009). Главни закључак је да је у том процесу основна идеја развијање способности прекривања или поделе површине без празнина или преклапања користећи различите јединице мере.

Иако је истраживање спроведено на малом узорку (четрдесет и петоро ученика), можемо приметити неке тенденције и извући основне импликације. Резултати су показали да 64,4% ученика разуме идеју о поплочавању и упоређивање дате површи са датом јединицом мере. У истраживању је коришћен задатак у коме је дата фигура представљена на квадратној мрежи и није било потребе да је ученици деле, већ само да уче јединице мере, па можемо рећи да су захтеви базични. У том смислу, очекиван је висок проценат успешности на овом задатку. Да су наведене способности основне идеје без којих ученици неће моћи да развију дубље разумевање мерења површине, показују и опадајућа постигнућа на другим задацима. Само 11,1% ученика показао је одређен степен разумевања формуле, појам обима и површине разликује 26,7% ученика, а стратегије рачунања површине правоуглог троугла (половина површине правоугаоника) успешно је применило 17,8% ученика, када је троугао представљен на квадратној мрежи, а 15,6%, када није представљен на квадратној мрежи. Иако је разлика у успешности мала између задатка када је фигура представљена на квадратној мрежи и када су само дате димензије, ипак говори у прилог томе да је ученицима интуитивно ближа идеја о поплочавању од алгоритамског приступа. На крају, свега 8,9% ученика је успело да исправи погрешно решење.

С обзиром на приказане резултате, можемо закључити да су ученици у нашем узорку подучавани алгоритамским приступом мерења површине. Осим ниских постигнућа на тесту у прилог том закључку говоре и стратегије које су ученици покушавали да примене на задацима. Наиме, ученици су доминантно покушавали да примене одређене формуле, које нису биле одговарајуће. Тако су, иако су све фигуре биле 2Д, ученици писали формуле за рачунање површине квадра, као и формуле за рачунање обима одређених фигура. Разумевање поступака којима се одређују површи фигура заглављено је у крути оквир правила и формула. Мишљења смо да већина ученика која је учествовала у нашем истраживању није била у могућности да испрати велики „когнитивни скок“ и да са идеје о поплочавању фигура одређеним јединицама мере дође до концептуалног разумевања формула и поступака рачунања површине. Напоменимо да је тестирање ученика спроведено на крају четвртог разреда, када су поред мерних јединица обрађене и површине правоугаоника, квадрата, коцке и квадра. Очекивано је да ученици потпуно разумеју идеју површине. Основна импликација нашег истраживања јесте истицање потребе да се ученицима да довољно времена за разумевање основних мерних јединица за површину и да науче да рачунају површину користећи концептуалне приступе подели фигура и поплочавању, што представља основу разумевања површине других фигура. Када једном ученици добро разумеју и визуелизују структуру површи (у односу на мерну јединицу), они ће лако повезати структуру са формулом површине.

Литература

- Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27 (3), 258–292.
- Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K. & Van Auken, C. B. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (5), 503–532.
- Battista, M. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area & volume measurement. *Mathematical Thinking & Learning*. 6 (2), 185–204.
- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In: Lester, F. (ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching & learning* (843–908). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

- Clements, D. & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In: Clements, D. & Sarama, J. (Eds.). *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education* (299–320). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Đokić, O. (2014). Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije. *Inovacije u nastavi*. 27 (2), 7–21.
- Herendine-Konya, E. (2015). The level of understending geometric measurement. In: Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.). *Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (536–542). Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education & ERME.
- Huang, H. M. E. & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning amd Instruction.* 21 (1), 1–13.
- Huang, H. M. E. & Witz, K. G. (2013). Children's Conceptions of Area Measurement Their Stratgies for solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriclum and Teaching.* 2 (1), 10–26.
- Huang, H. M. E. (2017). Curriculum interventions for area measurement instruction to enhance Children's conceptual understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 15 (7), 1323– 1341.
- Jelić, M., Đokić, O. (2017). Ka koherentnoj strukturi udžbenika matematike – analiza udžbenika prema strukturnim blokovima TIMSS istraživanja. *Inovacije u nastavi*. 30 (1), 67–81.
- Kamii, C. & Kysh, J. (2006). The difficulty of „length×width": Is a square the unit of measurement? *The Journal of Mathematical Behavior*. 25 (2), 105–115.
- Kordaki, M. & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 11, 99–135.
- Kow, K. & Yeo, J. (2008). Teaching Area & Perimeter: Mathematics-Pedagogical-Content Knowledge-in-Action. In: Goos, M., Brown, R. & Makar, K. (Eds.). *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (621–627). Brisbane: MERGA.
- Lin, P. J. & Tsai, W. H. (2003). Fourth graders' achievement of mathematics in TIMSS 2003 field test (in Chinese). *Science Education Monthly*. 258, 2–20.
- Martin, W. G. & Strutchens, M. E. (2000). Geometry & measurement. In: Silver, E. A. & Kenney, P. A. (Eds.). *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (193–234). Reston, VA: NCTM.
- Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*. 31 (2), 144–167.
- Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J. & Woleck, K. R. (2002). *Measuring space in one, two & three dimensions: Case book*. Parsippany, NJ: Dale Seymour Publication.
- Stephan, M. & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In: Clements, D. H. & Bright, G. (Eds.). *Learning & teaching measurement* (3–16). Reston, VA: NCTM.
- Strutchens, M. E., Harris, K. A. & Martin, W. G. (2001). Assessing geometry & measurement. Understanding using manipulatives. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 6 (7), 402–405.

- Tan, N. J. (1995). The study of the concepts of area measurement (in Chinese). *Compulsory Education*. 35, 1–21.
- Tan, N. J. (1999). A study on the exploration of the elementary teachers' pedagogical content knowledge on the students' misconception in measurement. *Journal of National Taipei Teachers College*. 12, 407–436.
- Usiskin, Z. (2012). *What does it mean to understand some mathematics*? Retrieved May 5, 2017 from www: http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/panama_cursusboek/pcb_31_11-30_Usiskin.pdf
- Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (5th ed.). New York: Pearson Education.
- Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary & Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (6th ed.). New York: Pearson Education. Inc.
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*. 25 (3), 224–239.

Summary

Surface measurement is an important topic of the school curricula which is closely related to other mathematical topics and to the real world. The results of numerous international studies show that students' achievements in the area of surface measurement are low, which is explained by the algorithmic approach to the topic characterised by the emphasis on procedural skills and the application of formulas. The paper looks at different levels and parameters of the conceptual understanding of surface measurement.. The aim of the research is to examine the level and quality of knowledge about surface measurements among pupils of the fourth grade of primary school. The descriptive method and testing technique were used in the research. The test consists of standardised tasks (Huang & Witz, 2013) and two more tasks that are not part of the standardised test and that were designed based on the transcript of the interviews from the above study. The convenience sample consisted of two classes of the fourth-grade pupils of a primary school in Belgrade. The key conclusion is that students have developed an instrumental understanding of the surface measurement procedure and that the strategies for determining the surface of the figures reduce the application of the formula, which is why they choose, often mistakenly, the wrong formula. Based on the research findings, we conclude that more time should be devoted to activities involving the conceptual approach to the division of figures and tiling. These activities will bridge the great gap between surface tiling and counting the units of measure and the understanding of calculation formulas.

***Keywords**: measurement, surface area, algorithmic and conceptual approach.*