UDC 371.3:512-057.875

Иновације у настави, XXX, 2017/2 стр. 158–171
doi: 10.5937/inovacije1702158R

Рад примљен: 12. 9. 2016.
Рад прихваћен: 5. 6. 2017.

Кратки научни прилог

Даниел А. Романо[1]
Универзитет у Источном Сарајеву, Педагошки факултет Бијељина, Босна и Херцеговина

Перцепције геометријског концепта правоугаоника студената учитељског програма

Резиме: *У овом тексту представљамо део истраживања перцепције геометријског концепта правоугаоника студената учитељског програма. Та перцепција се односи на парадиме: посебна математичка знања о правоугаоницима неопходна реализаторима наставе математике; посебна методичка о томе како би требало подучавати ученике о правоугаонику у нижим разредима основне школе; и способности разумијевања процеса подучавања и ученичког учења о концепту ове геометријске фигуре. Понуђени садржај представља парцијални извјештај о реализацији пројекта „Установљавање нивоа математичке писмености", који реализује Научно друштво математичара Бања Лука. Требало би да резултати овог истраживања буду подршка академској заједници у преговорима са друштвеном заједницом о квалитету математичког и методичког образовања будућих реализатора наставе математике у нижим разредима основне школе у нас.*

Кључне ријечи: *геометријски концепт правоугаоника, Ван Хилеови нивои, студентска перцепција правоугаоника.*

Увод

Понуђени текст спада у домен „Истраживање математичког образовања", као математичко-хуманистичка и хуманистичко-математичка активност у сагледавању парадигми „школска математика", „математичка знања неопходна учитељима", „методичка знања неопходна учитељима" и „разумијевање процеса подучавања и ученичког учења", у овом конкретном случају, у нижим разредима основне школе у нас. На основу истраживања формира се слутња/хипотеза да постоји јаз између информација које нуде друштвена и академска заједница о писмености студената учитељског програма у свакој од поменутих парадигми, с једне стране, и њихове стварне успјешности у томе, с друге стране. Такође, наслућује се да превазилажење значајног броја проблема у настави математике у нижим

1 bato49@hotmail.com

Copyright © 2017 by the authors, licensee Teacher Education Faculty University of Belgrade, SERBIA.

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY 4.0) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original paper is accurately cited.

разредима основне школе у нас треба тражити у помјерању фокуса са ученика према реализаторима те наставе.

Овај рад се односи на недавно спроведено истраживање нивоа разумијевања геометријског концепта правоугаоника код студената учитељског програма у оквирима вишегодишњег истраживања о математичкој и методичкој писмености студената наставничких факултет које реализује Научно друштво математичара Бања Лука. Постоји више аналогних истраживања о ученичким и студентским разумијевањима концепта правоугаоника (погледати, на примјер: Aytekinet et al., 2011; De Villiers, 1994; Fujita, 2012; Fujita & Jones, 2007; Türnüklü et al., 2013; Türnüklü et al., 2013a). Прикупљене су студентске рефлексије на једно од једноставних питања у школској геометрији – *шта је правоугаоник*. Тестирана популација студената учитељског програма посједује врло скромна математичка и методичка знања о овој геометријској фигури. Наравно, иако ово истраживање нема универзални карактер, резултатима овог иницијалног истраживања се сугерише о могућим значајним импликацијама о овом геометријском концепту у процесу реализације наставе математике у нижим разредима основне школе.

Требало би да резултати овог и аналогних истраживања буду подршка академској заједници при преговарању са друштвеном заједницом о квалитету математичког и методичког образовања будућих реализатора наставе математике у нижим разредима основне школе у нас.

Теоријска заснованост

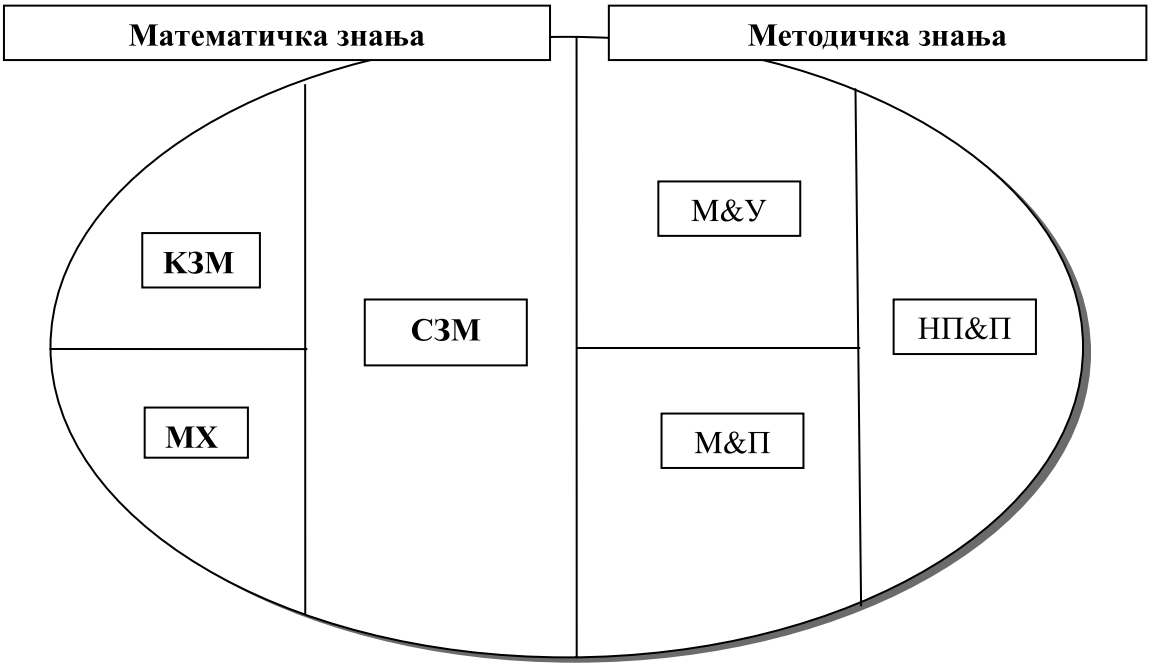
У одређеним текстовима (Ball et al., 2005; Ball & Sleep, 2007) понуђено је више карактеризација које разликују предмет испитивања, знања и методичких знања будућих реализатора наставе математике у нижим разредима основне школе. Могу се идентификовати четири компоненте:

- *колективна знања математичких садржаја* (КЗМ) препознајемо као парадигме „школска математика“ одговарајућег разреда основне школе;
- *специјализована знања математичких садржаја* (СЗМ) препознајемо као математичка знања неопходна реализаторима наставе математике у нижим разредима основне школе;
- *посебна знања која повезују математичке садржаје и ученике* (М & У) препознајемо као посебна методичка знања неопходна реализаторима наставе математике, што, између осталог, укључује циљеве и исходе наставе;
- *посебна знања која повезују садржаје математике и вјештине подучавања* (М & П) препознајемо као посебна знања и разумијевања процеса подучавања и ученичког учења математике у нижим разредима основне школе, што укључује, између осталог, способности препознавања специфичности разних облика математичког мишљења, наставних задатака али и класификације математичких задатака којима се ти наставни задаци остварују.

У новије време претходној карактеризацији додате су још двије врсте знања:

- познавање наставног плана и програма математике (НП & П);
- знања које се односе на математички хоризонт (МХ).

Наводимо и илустрацију (преузето из: Ball & Sleep, 2007) у којој су приказане споменуте компоненте и како су међусобно повезане.



***Слика 1**. Карактеризација знања и методичких знања неопходних учитељу*

Наводимо једно од важнијих питања у математичком образовању – *шта одређује стварно разумијевање математичких објеката унутар претходно поменутих парадигми* Ричард Скемп (Skemp, 1976) идентификује постојање два аспекта термина „разумијевање“: *инструментално разумијевање* и *релационо разумијевање*. Инструментално разумијевање подразумијева овладавање математичким правилима као и посједовање вјештина за коришћење тих правила. Релационо разумијевање подразумијева овладавање математичким правилима, знање како користити та правила али и знање како та правила функционишу. О овим концептима на нашем језику погледати текст аутора Зељића (Zeljić, 2006).

У нашем школском систему главни нагласак у реализацији наставе математике деценијама је био на такозваним *процедуралним знањима*. Учење напамет је била норма. При томе је мало пажње посвећивано разумијевању математичких концепата и процеса са њима. С друге стране, подсјетимо се како су *математичка умјећа*, неопходна реализаторима наставе математике, описана у чувеној књизи *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*' (National Research Council, 2001) – да би били математички умјешни, студенти студијског програма за образовање професора разредне наставе (будући учитељи) требало би да владају:

Концептуалним разумијевањем: разумијевањем математичких објеката (концепата, процеса, релација, функција и операција...);

Процедуралним вјештинама: вештине у обављању поступака флексибилно, тачно, ефикасно и на прихватљив начин;

Стратешким компетенцијама: способност да препознају, разумију, формулишу (такозвана линеарна математизација), представе и ријеше математички проблем (такозвана вертикална математизација) и интерпретирају добивена рјешења;

Прилагодљивим резоновањем: способност за математичко (логичко, аритметичко, раноалгебарско, алгебарско, геометријско, статистичко...) мишљење, објашњавање, процјењивање и оправдавање (препознавање социоматематичких норми (Yackel & Cobb, 1996));

Продуктивном диспозицијом: стална склоност да се на математику гледа као на рационалну, корисну и сврсисходну људску активност заједно са увјерењима о сопственој ефикасности у томе.

Намјера је да се овим текстом представе установљене потешкоће са којима се сусрећу студенти учитељског програма у припремању реализације наставних садржаја из геометрије у нижим разредима основне школе, на примеру правоугаоника, повезујући неопходна математичка знања са неопходним методичким знањима као подршка академској заједници у преговорима са друштвеном заједницом о подизању квалитета математичког и методичког образовања будућих учитеља у нашем школском систему.

Ван Хилеови нивои геометријског мишљења

Постоји пет нивоа разумијевања геометрије по Ван Хилеовој класификацији. За потребе ове студије подсјећамо читаоца на прва три (Van Hiele, 1986), будући да се очекује да неопходна математичка знања тестиране популације буду минимално на Нивоу 2.

Ниво 0 је ниво *визуелизације*. Ученици на том нивоу искључиво на основу перцепције базирају своје мисли и на основу њих доносе одлуке, без познавања било каквих разлога. Они су у стању да препознају геометријске ликове као што су тространик, четвороспраник или кружница; у стању су да уочавају њихове особине; и у стању су да их разликују од других геометријских ликова.

Ниво 1 је ниво *анализирања*. На овом нивоу ученици осим способности уочавања, препознавања и разликовања геометријских ликова (Ниво 0) способни су да:

- уочавају, препознају и разликују елементе посматраног геометријског лика;
- знају да опишу уочене елементе као самосталне геометријске ликове;
- установе везе између уочених елемената посматраног геометријског лика.

Ниво 2 – ниво *апстракције* или, како га неки називају, ниво неформалне дедукције. На овом нивоу се очекује да ученици/студенти препознају, разумију и прихватају односе између особина геометријских облика и, на основу тога, односе међу самим геометријским облицима. Почињу размишљати дедуктивно, али се још увијек не очекује од њих да разумију законитости унутар формалног дедуковања. На овом нивоу разумијевања геометрије ученици/студенти почињу размишљати о томе шта је довољно, а шта потребно да се неки геометријски лик опише.

Појам концепта

Посебност математичког мишљења експонирана кроз размишљања о онтолошком и епистемолошком статусу математичког објекта, у овом случају геометријске фигуре правоугаоник, предмет је у овом сегменту рада. У вези с претходним, у зависности од тачке гледишта и у зависности од контекста, двије различите ријечи ће се користити за означавање математичког објекта. Ријеч концепт се користи кад год се мисли на математички категоријални објект у ње-

говој официјелној форми – као један теоријски конструкт у „формалном универзуму идеалног знања“ (Sfard, 1991). С друге стране, цијели кластер интерних репрезентација у нашим људским асоцијацијама са концептом поменутог објекта биће у нашим унутрашњим субјективним „универзумима знања“ повезан са термином „појам“ (у српском језичком простору протежира се термин „појам“ за оба ова аспекта). За разлику од материјалних предмета, математички објекти су потпуно недоступни нашим чулима – они се могу видјети само унутрашњим очима нашег ума. Кад, на примјер, нацртамо правоугаоник, увијек треба наглашавати да је модел на папиру само једна од могућих репрезентација тог апстрактног ентитета. Математичари и едукатори математике тврдње о постојању и егзистенцијалним особинама математичког објекта али и о начинима нашег сазнавања о њему постављају без много интересовања о томе какве филозофске рефлексије могу изазвати њихове тврдње. „Видјети“ математички ентитет као објекат значи бити у стању говорити о њему да као реална ствар – статична структура – постоји негдје у свемиру.

Дакле, у овом тексту користиће се дуално *концепт/појам*; под концептом геометријског објекта мислимо (Franke, 2007) на категорију или класу објеката који асоцирају на неки конкретни објект. Под развојем геометријског концепта геометријске фигуре подразумијевамо слиједеће:

- препознавање фигуре, знање имена те фигуре, знање такозване скоро-дефиниције те фигуре, препознавање других објеката исте категорије као и препознавање карактеристика категорије ових објеката (Ниво 0 по Ван Хилеовој класификацији);
- препознавање карактеристика елемената објеката ове категорије и препознавање особина ових карактеристичних елемената и њихових међусобних односа (Ниво 1 по Ван Хилеовој класификацији).

Дакле, разумијевање концепта неког геометријског објеката експонира се посредством слиједећих способности:

- препознавање облика;
- знање имена облика;
- способност уочавања елемената тог облика;
- способност формирања такозване скоро-дефиниције тог облика;
- способност препознавања других елемената унутар категорије истих објеката;
- способност препознавања и именовања већине карактеристика изабране категорије.

Правоугаоник

Четвоространик је многостраник са четири странице. Дакле, концепт *многостраника* претходи увођењу концепта четвороструника. Са појмом многостраника ученици се упознају у другом разреду основне школе. Многостраник је *затворена изломљена линија*. Двије или више дужи повезане тако да се почетна тачка слиједеће дужи подудара са крајњом тачком претходне дужи чини *изломљену линију*. Изломљена линије *је затворена* ако се завршна тачка те комплетне линије *подудара* са почетном тачком. Концепти који претходне увођењу и дескрипцији геометријске фигуре „изломљена линија“ су: дуж, почетна тачка, завршна тачка и релација „подударати“. Дужи које чине затворену изломљену линију су *странице* тог многостраника. Многостраник који има три/четири/пет/... страница је тространик/четвороструник/петоространик/... (термин „многостраник“ базиран је на препознавању и ослањању на термин „дуж“/„страница“ који му претходи. У српском језику чешће је

у употреби термин „многоугао“, иако је термин „угао“, на који се ослања ова детерминација, когнитивно комплекснији од термина „страница“). Компоненте четвороугаоника су: четири *тјемена*, четири *странице* и четири *унутрашња угла*. Нешто детаљније о геометријском концепту дужи и концептима „почетна“/„завршна“ тачка читалац може наћи код аутора Романо и Винчић (Romano, Vinčić, 2013), а о геометријском концепту угла у текстовима Црвенковића и сарадника (Crvenković i sar., 2012; 2012a). Концепт геометријске фигуре *прави угао* је когнитивно комплексан и подучавање ученика четвртог разреда основне школе том концепту захтјева од реализатора наставе значајно софистициранији поступак него што је то уобичајено на Нивоу 1.

Четвороугаонике класификујемо (De Villiers, 1994; Fujita & Jones, 2007; Fujita, 2012) према слиједећим критеријима:

(ПС) *Број парова паралелних страница четвороугаоника*:

ПС0: Четвороугаоник нема паралелних страница;

ПС1: Четвороугаоник има један пар паралелних страница (*трапези*);

ПС2: Четвороугаоник има два пара паралелних страница (*паралелограми*).

(ПУ) *Број правих углова у четвороугаонику*:

ПУ0: Четвороугаоник нема прави угао;

ПУ1: Четвороугаоник има један прави угао;

ПУ2: Четвороугаоник има два права угла;

ПУ4: Четвороугаоник има четири права угла (*правоугаоници*).

(СС) *Међусобни однос сусједних страница четвороугаоника*:

СС0: Четвороугаоник нема једнаких сусједних страница;

СС1: Четвороугаоник има један пар једнаких сусједних страница;

СС2: Четвороугаоник има два пара једнаких сусједних страница (*делтоиди*).

Може се провјерити да је сваки правоугаоник истовремено и паралелограм. Обрнуто не мора бити: има паралелограма који нису правоугаоници. На примјер, *ромб* и *ромбоид* код којих унутрашњи углови нису прави су паралелограми али нису правоугаоници. Дакле, паралелограм је правоугаоник ако су му унутрашњи углови прави. Из изложеног дедукујемо:

Правоугаоник је паралелограм код којега су унутрашњи углови прави.

Геометријска фигура „правоугаоник“ није објект који реално постоји. Концепт те фигуре је резултат процеса апстракције. Како математички објекти не постоје у реалности, већ су производ људског ума, конструисање математичких знања засновано је на људској способности апстракције. *RBC* (Recognizing-Building with-Constructing) *модел апстракције* наглашава потребу и стимулацију у процесу апстракције. Активности унутар ове теорије су: препознавање (*recognizing*), кориштење алата (*building with*) и конструкција (*construction*). Апстракција, један од основних појмова који се користе у овој студији, дефинисан је на једноставан начин као „процес преласка са *препознатљивог* до *апстрактног*“ (Hershkowitz et al., 2001). Три поменуте епистемиолошке активности ћемо додатно објаснити: (а) *препознавање* је употреба претходно формиране структуре. Дакле, „препознавање“ познате математичке структуре коју ученици препознају као *многострани*к = затворена изломљена линија у мисаоном смислу настаје када њихов ум сусретне, идентификује и разумије (у цјелини, али и по дијеловима) ову структуру у математичком контексту; (б) У процесу *кориштење елемената и алата* ученички/студентски ум још увијек није обогаћен новим комплекснијим знањима, већ се користи постојећим знањем да разумије и разријеши нову парадигму унутар математичког концепта у којем се креће,

трагајући за новим сазнањима (Hershkowitz et al., 2004). У овој етапи ученички умови прате конструкцију многостраника и диференцијацију тако конструисаних многостраника према броју страница; (в) процес *конструисање,* такође познат као поновно (пре)уређење надограђивањем, јесте процес изградње нових знања. То је процес којим се постојеће компоненте математичког знања, концепт четвоространика, допуњују новим компонентама – диференцијацијом четвоространика према одређеним предикатима – на нови начин међусобно уређују успостављајући комплексније уређење у претходној решетки сазнања и тако добијају нова значења.

Дакле,

Правоугаоник је четвоространик који има четири права унутрашња угла; или

Правоугаоник је паралелограм чији су унутрашњи углови прави.

Требало би очекивати да ће претходна конструкција бити препозната и (ре)конструисана. У настојањима да посредством ове *RBC* теорије понуди потпуно прихватљиво образложење у формирању нових структура знања, Томи Драјфус је 2007. године предложио њено проширење процесом *консолидације*, формирајући тако *RBC + C* теорију апстракције (Dreyfus, 2007). Под процесом консолидације ученичког/студентског знања о неком математичком објекту Драјфус мисли на повезивање концепта поменутог математичког ентитета са другим математичким концептима у истој когнитивној равни али и на способности његовог кориштења у напреднијем мишљењу. Дакле, према Драјфусу, консолидовано знање о неком математичком концепту подразумијева да, осим препознавања концепта и разумијевања његових особина, процес консолидације дозвољава провјеравање. У овом случају мисли се на разумијевање, усвајање и прихватање класификације четвоространика као дијела консолидације знања о правоугаоницима.

Методичке изазове у детерминацији концепта правоугаоника на Нивоу 1, у покушају да се разумије механизам Пијежеове одговарајуће апстракције, у овом случају, могуће је сагледати ослањањем на АПОС теорију (Dubinsky & McDonald, 2002), која омогућава квалитетно наставничко самоистраживање успјешности у досезању циљева наставе математике али и квалитетно установљавање корелација циљева наставе математике и пожељних исхода те наставе, с једне стране, и наставничке и ученичке успјешности у томе, с друге стране (Romano, 2014).

Методологија

Ученичко разумијевање концепата и њихових међусобних односа, разумијевање процеса са тим концептима али и њихова флуентна употреба у процедурама су пожељни исходи наставе математике. Пожељан исход Методике наставе математике је студентско разумијевање процеса који омогућавају квалитетније ученичко разумијевање поменутих појава у математичком образовању.

Будући да је индивидуално математичко знање засновано на ученичким, односно студентским рефлексијама док се труде да разумију неку математичку ситуацију или проблем и пронађу рјешење, до изражаја долази социјални контекст у конструисању и/или реконструисању ових активности, процеса и објеката који се појављују у тој ситуацији или проблему. Сем тога, особа која учи организује их у шемама/шаблонима у одговарајућим позицијама у вези са поменутом ситуацијом или проблемом (Dubinsky & McDonald, 2002).

Задатак

Како би се истражило шта под ријечју *правоугаоник* подразумевају, односно како студенти схватају наведени појам, тестирали смо шездесет пет студената два студијска програма за образовање професора разредне наставе (учитеља) у Бијељини и Бихаћу, унутар вишегодишњег истраживачког пројекта „Установљавање нивоа математичке писмености“, који реализује Научно друштво математичара Бања Лука. Тестирање је реализовано у фебруару и марту 2013. године. У оквирима теста кандидатима су постављена питања о правоугаонику, о томе како га они схватају и о томе како би га требало репрезентовати ученицима нижих разреда основне школе.

Питање: 1. *Опиши правоугаоник.* 2. *Искажи дефиницију правоугаоника.* 3. *Како се ученици подучавају концепту правоугаоника*: (а) *У другом разреду*? (б) *У четвртом разреду*?

Учесници тестирања су позвани да одговоре у писменој форми без временског ограничења за завршетак задатка. Одабрали смо концепт правоугаоника из неколико разлога: прво, то је један од геометријских објеката са којим се ученици нижих разреда основне школе у нас упознају у другом разреду. Друго, правоугаоник је специјалан случај паралелограма и као такав погодан је за препознавање из шире класе посредством посебних предиката. Питање 1. односило се на детерминацију правоугаоника. Дакле, употребљене реченице за опис ове геометријске фигуре могле су садржавати више предиката него што је довољно за детерминацију фигуре. Питање 2. потраживало је од студената да понуде прецизну дефиницију правоугаоника. Дакле, реченице које су студенти конструисали као одговоре на постављено питање требало је да садрже само потребне и довољне предикате за детерминацију правоугаоника.

У овом тексту сакупљени су неки од студентских одговора који се односе на детерминацију правоугаоника, као и на дефинисање правоугаоника као једног од геометријских концепата. Очекивало се да студенти препознају различитост првог и другог захтјева и у овом задатку. Очекивало се да студенти експонирају своја умијећа на којима би морала да се заснива њихова реализација наставе о овим геометријским концептима (трећи захтјев). У другом разреду, у школском систему у Босни и Херцеговини, реализатор наставе упознаје ученике са неким од модела правоугаоника уз обавезно кориштење именице „правоугаоник“ као имена тог модела. Разговор са ученицима треба да омогући ученичко успјешно препознавање модела правоугаоника као и његово разликовање од модела других објеката. Такав приступ препознајемо као *објектски приступ*. Ниво разумијевања процјењујемо као Ниво 0.

У оквирима курса Методика наставе математике студенти студијског програма за образовање учитеља подучавају се, између осталог, елементима математичког, у овом случају геометријског (о геометријском мишљењу читалац може погледати у: Romano, 2009), мишљења посредством сагледавања, разумијевања и прихватања категоријалних појмова Ван Хилеове теорије, АПОС теорије и *RBC + C* теорије апстракције. Од студената се очекивало да у одговору на питање 3. (б) постављеног задатка, користећи се терминима поменутих теорија, понуде своја промишљања о могућем начину подучавања ученика четвртог разреда унутар „традиционалног аспекта“, Теорије дидактичких ситуација и/или Теорије реалистичког математичког образовања.

О знањима које процјењујемо као Ниво 1 било је раније ријечи. Такође, о неопходним математичким знањима, о неопходним методичким знањима и о неопходном разумијевању процеса подучавања и ученичког учења о геометријском концепту правоугаоника било је ријечи у претходном одјељку.

Парцијални резултати истраживања

Ниже су изложени неки од студентских одговора на питање о детерминацији правоугаоника. Одговори су разврстани у четири кластера.

Први кластер је, ради илустрације, представљен једним студентским одговором у којем истраживач, и поред знатног настојања, није успио да реконструише студентску перцепцију правоугаоника. У таквим одговорима студенти су се користили неуобичајеним слоганима које вокабулар математичких термина не препознаје. На примјер: синтагме „уздужна раван“, „дужне равни“ и предикат у конструкцији „равни су по двије исте“.

Други кластер чине одговори у којима се правоугаоник детерминише као тродимензиони подскуп простора – „геометријско тијело“.

Трећи кластер чине (неприхватљиви) одговори у којима се концепт правоугаоника описује категоријом „геометријска фигура“.

Последњи, *четврти кластер* су прихватљиви одговори и представљен је само са двама одговорима.

Група 1: Некласирано

Правоугаоник је уздужна раван; она је сачињена од четири дужне равни, од којих су по двије исте.

Група 2: Правоугаоник је геометријско тијело

Геометријско тијело које нема све исте стране. Дужина је већа од ширине.

Правоугаоник је геометријско тијело које има по двије исте стране.

Правоугаоник је геометријско тијело које има по две паралелне стране.

Правоугаоник је геометријско тијело које има двије исте стране.

Правоугаоник је геометријско тијело које нема по двије једнаке странице.

Правоугаоник је геометријско тијело које нема све једнаке стране.

Геометријско тијело које нема исте стране.

Геометријско тијело које нема једнаке странице.

Правоугаоник је геометријско тијело које нема све исте странице.

Правоугаоник је геометријско тијело које има једнаке стране.

Правоугаоник је геометријско тијело које нема исте стране.

Правоугаоник је геометријско тијело које има по двије исте стране и све праве углове.

Правоугаоник је геометријско тијело које има четири странице, од чега двије исте странице.

Правоугаоник је геометријско тијело (фигура) која има четири стране, два пара једнаких страна.

Група 3: Правоугаоник је геометријска фигура

3.1. Правоугаоник је геометријска фигура која има по двије исте странице.

3.2. Правоугаоник је геометријска фигура која има различите странице.

3.3. Правоугаоник је геометријска фигура која нема све једнаке стране.

3.4. Правоугаоник је геометријска фигура која нема једнаке стране.

3.5. Правоугаоник је геометријска фигура која нема све исте странице.

3.6. Правоугаоник има четири странице и сусједне странице су исте.

3.7. Правоугаоник има по двије исте паралелне странице.

3.8. Правоугаоник је фигура која има по двије исте подударне странице.

3.9. Правоугаоник је многостраник који има четири странице и четири права угла.

Група 4: Прихватљиве дескрипције

Правоугаоник је паралелограм са правим угловима.

Правоугаоник је четвороструник са правим угловима.

Анализа

Резултати тестирања студената који се односе на питања 1. и 2. из постављеног задатка приказани су у Табели 1.

***Табела 1**. Дистрибуција студентске успјешности која се односи на прва два питања.*

Понуђени одговори				
Тражени концепт	Прихватљиви	Неприхватљиви	Без одговора	
Скоро-дефиниција	32 (49,23%)	28 (43,08%)	5 (7,69%)	65 (100,0%)
Дефиниција	7 (10,77%)	48 (73,85%)	10 (15,38%)	65 (100,0%)

Табела 1. показује резултате на питања 1. и 2. постављеног задатка. Уочава се да је број испитаника који је понудио прихватљив опис правоугаоника (тридесет два кандидата или 49,23%) знатно виши од броја испитаника који су понудили прихватљиву дефиницију правоугаоника (седам кандидата или 10,77%). Број неприхватљивих одговора и број кандидата који уопште нису понудили било какав одговор на захтјев о детерминацији правоугаоника износи забрињавајућих тридесет три (50,77%), док је број кандидата који нису афирмативно одговорили на захтјев за исказивање прецизне дефиниције геометријског објекта правоугаоника потпуно депримирајућих педесет осам тестираних кандидата (или 89,23% од укупног броја тестираних кандидата).

Сви понуђени одговори у *другом кластеру* су неприхватљиви, будући да студенти правоугаоник разврставају у категорију тијела. Осим тога, уочено је студентско недиференцирање термина „страница“ и термина „страна“, што овом истраживачу поткрепљује увјерење о студентском недиференцирању подскупова у равни и подскупова у геометријском простору.

Нешто детаљније ћемо анализирати понуђене одговоре разврстане у *кластеру три*. Прво, правоугаоник се може подврстати под категорију „геометријска фигура“. Друго, једна од уочених непрецизности због које ове одговоре треба процјењивати као неприхватљиве је употреба предиката „исти“ умјесто „једнаки“. Треће, сви понуђени одговори, осим 3.6, не говоре о четвороструницима. Четврто, ако ипак претпоставимо да се мислило на четвороструике, ниже су понуђене такве фигуре које задовољавају понуђену детерминацију а ипак нису правоугаоници:

3.1. Ромб, ромбоид и делтоид су геометријске фигуре која имају по двије једнаке странице.

3.2. Овај предикат задовољава сваки четвороструник који има различите странице.

3.6. Ромб, који није квадрат, има сусједне једнаке странице.

3.7. Ромб и ромбоид имају по два пара једнаких паралелних страница.

3.8. Ромб и ромбоид имају два пара једнаких подударних страница.

У одговорима 3.3, 3.4 и 3.5 предикат детерминације садржи у себи негацију, те постоји бесконачно много примјера четвороструника – неправоугаоника – који задовољавају понуђени предикат детерминације.

Одговор 3.9 не садржи захтјев да је тражена фигура четвороструник. Понуђени одговор је прилика да се прокоментарише захтјев да тражена фигура мора бити четвороструник. Ниже је изложена фигура (конструисана по угледу на: Zazkis & Leikin, 2008) која садржи четири странице и четири права угла а није правоугаоник.

Слика 2. Многострaник који садржи четири странице и четири права угла а није правоугаоник.

Сем тога, ова фигура има два пара паралелних страница. Из изложеног се може дедуковати:

Правоугаоник је многострaник који има ***само*** *четири странице и четири права угла.*

Закључак

Ово истраживање имало је за циљ стицање увида у перцепције студената студијског програма за образовање професора разредне наставе (учитеља) о правоугаонику. Стога смо тестирали шездесет пет студената треће и четврте године два педагошка факултета у Босни и Херцеговини. На основу повратних информација, у овом истраживању се формира слутња/хипотеза да ова тестирана популација има знатних потешкоћа са детерминисањем правоугаоника. Овом иницијалном студијом се сугерише да су заблуде које имају ученици нижих разреда у вези са овом геометријском фигуром последица заблуда које о њој имају њихови наставници. Ако прихватимо овакву констатацију и ако је проширимо на читаву наставу геометрије у таквим школама, онда долазимо до претпоставке да недовољан развој геометријског мишљења (Ниво 1 по Ван Хилеовој класификацији) код ученика је последица недовољних математичких и методичких знања али и недовољно развијених способности њихових наставника да разумију процесе подучавања и ученичког учења. Дакле, проблеме наставе геометрије у нижим разредима основне школе би требало решавати пребацивањем фокуса са ученика на њихове наставнике.

Као закључну рефлексију нудимо слијеђећа два питања:

Које и какве ће информације о правоугаоницима пренијети тестирани студенти својим будућим ученицима у четвртом разреду основне школе у нас?;

Које и какве друштвено-математичке норме у вези са претходним ће усвојити будући ученици тестираних кандидата?.

Али и слијеђеће промишљање:

Студенти учитељског програма имају знатних потешкоћа у препознавању и конструисању адекватних алата при подучавању својих будућих ученика концепту правоугаоника на Нивоу 1, у складу са Ван Хилеовом класификацијом. Те потешкоће се огледају:

– у недовољном знању унутар парадигме математичка знања која су неопходна реализаторима наставе математике, будући да знања већине тестираних кандидата, иако би требало да су на Нивоу

2, можемо процијенити као знања на Нивоу 0 и знања унутар Нивоа 1;

– у недовољно квалитетним неопходним методичким знањима о правоугаоницима, будући да већина тестиране популације, не правећи разлику између простора и геометријског простора, нема консолидована знања о алгоритмима теорија математичког образовања (на пример, Теорије дидактичких ситуација и/или Теорије реалистичког математичког образовања);

– у домени разумијевања процеса подучавања и ученичког учења о концепту геометријске фигуре правоугаоник.

Литература

- Aytekin, C. & Toluk Ucar, Z. (2011). Teachers' definition of square, rectangle, parallelogram and trapezoid. In: Uduz, B. (Ed.) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (254). Middle East Technical University, Ankara, Turkey: PME.
- Ball, D. L. & Sleep, L. (2007). *What is mathematical knowledge for teaching, and what are features of tasks that can be used to develop MKT?* Presentation at the Center for Proficiency in Teaching Mathematics presession at the meeting of the Association of Mathematics Teacher Educators, Irvine, CA, January 25, 2007.
- Ball, D., Bass, H., Sleep, L. & Thames, M. (2005). A theory of mathematical knowledge for teaching. Paper prepared for work session at the 15th ICMI Study Conference: *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. Brazil: Aguas de Lindoia.
- Crvenković, S., Milovanović, M., Romano, D. A. (2012). Neke dileme i pitanja koja se prirodno pojavljuju pri uvođenju pojma „ugao" u nižim razredima osnovne škole. *IMO – istraživanje matematičkog obrazovanja*. IV (7), 17–30.
- Crvenković, S., Milovanović, M., Romano, D. A. (2012a). Uporedna analiza prirode matematičkih znanja koja se koriste i konstruišu u učionici. *Norma*. 17 (2), 133–154.
- De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*. 14, 11–18.
- Dreyfus, T. (2007). *Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model*. Retrieved May 13, 2017 from: http://escalate.org.il/construction_knowledge/papers/dreyfus.pdf.
- Dubinsky, D. & McDonald, M. A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learningin Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton, D. et al. (Eds). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, 7* (275–282). New ICMI Study Series. Springer, Dordrecht.
- Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule – Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. 2. Auflage. München: Spektrum Verlag.
- Fujita, T. (2012). Learners' Level of Understanding of Inclusion Relations of Quadrilaterals and Prototype Phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior.* 31, 60–72.
- Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*. 9 (1–2), 3–20.

- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in contexts: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 32 (2), 195–222.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., Dreyfus, T. & Hadas, N. (2004). Abstracting Processes, from Individuals' Constructing of Knowledge to a Group's „Shared Knowledge". *Mathematics Education Research Journal.* 19 (2), 41–68.
- National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.
- Romano, D. A. (2009). O geometrijskom mišljenju. *Nastava matematike*. LIV (2–3), 1–11.
- Romano, D. A., Vinčić, M. (2013). Šta je duž – jedno istraživanje aspekata budućih učitelja. *Naša škola*. 63 (233), 139–156.
- Romano, D. A. (2014). APOS teorija – poseban aspekt razumijevanja pojava u matematičkom obrazovanju. *Norma*. 19 (1), 133–141 .
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22 (1), 1–36.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching.* 77, 20–26.
- Türnüklü, R., Akkaş, E. N. & Alayli, F. G. (2013). Mathematics Teachers' Perceptions of Quadrilaterals and Understanding the Inclusion Relations. In: Ubuz, B., Haser, Ç. and Mariotti, M. A. (Eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (705–714). Ankara: Middle East Technical University.
- Türnüklü, R., Alayli F. G. & Akkaş, E. N. (2013a). Investigation of Prospective Primary Mathematics Teachers' Perceptions and Images for Quadrilaterals. *Educational Sciences: Theory & Practice*. 13 (2), 1225–1232.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight.* New York: Academy Press.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27 (4), 390–408.
- Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*. 69 (2), 131–148.
- Zeljić, M. (2006). Matematički okviri za razradu matematičkih pojmova. *Inovacije u nastavi.* 19 (2), 49–56.

Summary

In this article we offer the research data on the perception of the geometric concept of rectangle by pre-service primary school teachers. This perception refers to the following paradigms: the specific mathematical knowledge of rectangles necessary for teachers; the special methodological knowledge about how rectangles shoud be taught to elementary school students; and the ability to understand the process of teaching and student learning about the concept of this geometric figure. The content of this article is a partial report on the implementation of the project "Establishment of the levels of mathematical literacy" implemented by the Scientific Society of Mathematicians in Banja Luka. The results of this study should be suport to academic community in the negotiations with the social

community about the quality of mathematical and methodological education of the pre-service primary school teachers in our educational system.

***Keywords**: geometric concept of a rectangle, Van Hiellel's levels, students' perception of a rectangle.*