Иновације у настави, XXVI, 2013/3, стр. 123–134 UDC 51:004.773

Рад примљен: 18. 06. 2013.
Рад прихваћен: 06. 12. 2013.

**мр Наталија Будински**[1]
**Основна и средња школа са домом ученика „Петро Кузмјак“, Руски Крстур**

**Стручни рад**

# *Могућности за побољшање функционалног знања ученика применом моделирања и хеуристичког резоновања у настави математике*

***Резиме***: *Овај рад смешта моделирање, као један од најсавременијих приступа у настави математике, у познати теоријски оквир Ђорђа Поље и хеуристичко резоновање или учење математике путем откривања. Циљ рада је да, теоријски и кроз пример, објасни везу између два приступа. Оба приступа иду у смеру развијања функционалних знања и подстицања ученика да самостално уочавају зависности између појава у реалном контексту и да их повезују са математичком теоријом.*

***Кључне речи***: *математичко моделирање, настава математике, Ђорђ Поља, хеуристичко учење.*

## Увод

Циљ наставе математике је да код ученика развије способност да истражују, закључују, логички резонују, као и да користе математику у решавању свакодневних проблема. Ове циљеве је у великој мери могуће остварити применом проблемске наставе или учењем математике путем решавања проблема. Решавање проблема подразумева интересантан и отворен проблем, чије решење и поступак долажења до њега нису унапред познати. Да би дошли до решења, ученици треба да примене раније стечена математичка знања и да кроз тај процес стекну нова. Применом стратегија решавања проблема ученици развијају апстрактно размишљање, радне навике, сигурност и сналажење у непознатим ситуацијама, а то им може помоћи и изван учионице.

У програмима Министарства Републике Србије постоје могућности и смернице за примену проблемске наставе математике. Истиче се такозвана *субјекатска позиција ученика* као један од основних циљева педагошке организације рада са ученицима (Службени гласник, 1991). То подразумева суочавање ученика са нужношћу да одлучују о свом раду и ситуацијама у којима се тај рад одвија.

Међутим, ако узмемо у разматрање резултате ПИСА тестирања, које тестира читалачку, математичку и научну писменост, постигнућа

1 nbudinski@yahoo.com

српских ученика су у врху ниског међународног референтног новоа (Antonijević, 2007). Овај међународни тест је показао да наши ученици имају добро репродуктивно знање, док им је употребно знање знатно лошије. Резултати захтевају промену начина учења, посебно учења математике, јер је математичка писменост један од три параметра који се проверавају. Задаци на ПИСА тесту су реалне ситуације у којима се ученици могу наћи. На тај начин се тестирају њихова функционална знања.

Функционална знања су примењива знања потребна за живот и рад у друштву. Ако је ученик у могућности да протумачи контекст проблема, схвати и повезује одређене научене чињенице и то примени у различитим ситуацијама у школи и ван ње, онда је његово знање функционално. Развијање функционалног знања врши се усмеравањем образовног процеса према ученику и његовим активностима. Да би се математика користила у свакодневном животу, није неопходно да се буде експерт у области математике или информатике. Међутим, потребно је да се решавању проблема приступи на карактеристичан начин. Предложени методи у овом раду могу да отклоне недостатке у функционалном знању ученика, међутим њихова примена у самој настави није једноставна. Прелазак са учења процедура за решавање задатака на развијање математичког мишљења преко нестандардних начина захтева значајно ангажовање учесника наставног процеса.

## Учење математике моделирањем реалних проблема

Моделирање у најширем смислу представља процес који започиње реалном ситуацијом, а завршава се разумевањем те ситуације. Када се до разумевања ситуације долази употребом математике, процес се назива математичко моделирање. Једна од најширих дефиниција, али и оних које најбоље описују моделирање дата је од стране Мершерта и гласи: „Математичко моделирање је веза између математике и остатка света" (Meerschaert, 2010).

Моделирање у настави је светски тренд, што показује све већи број радова и истраживања у методици наставе математике на ту тему (Boaler, 2001; Mason, 2001; Doerr & English, 2003; Lamon, Parker & Huston, 2003; Kaiser & Shwarz, 2006; Galbraith, Stillman, Brown & Edvards, 2007; Muhammad, 2008; Blomhoj, 2009; Ang, 2009).

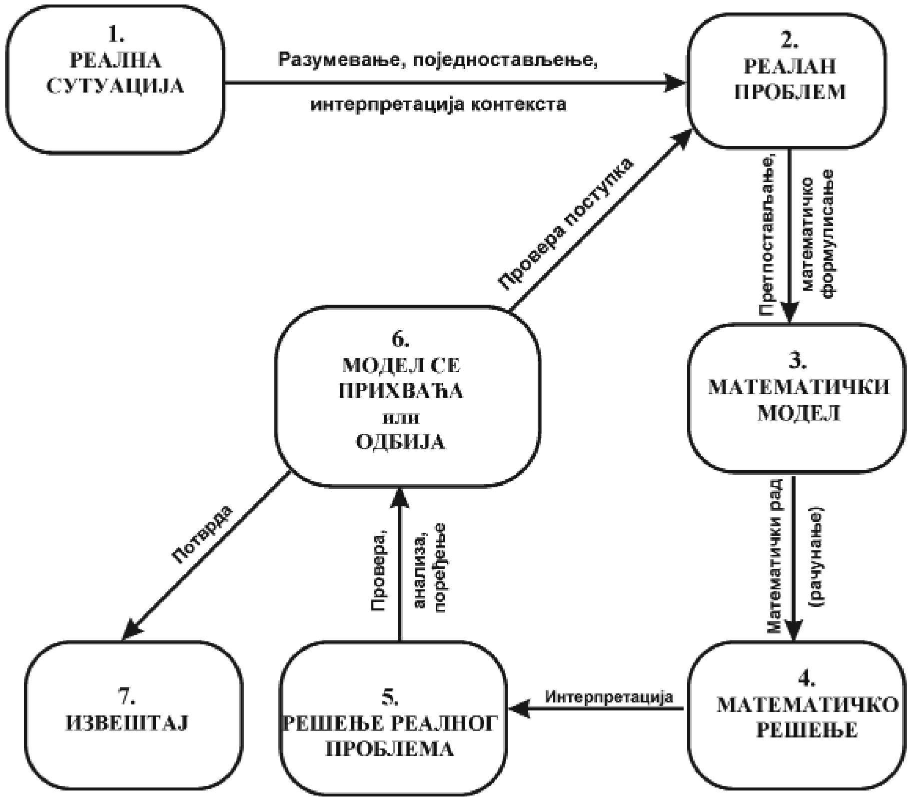
Математичко моделирање у образовању бави се његовом применом у настави, као и способностима и знањима које ученици њиме стичу. Математички модели су свуда око нас, а моделирање омогућава да ученици боље разумеју свет око себе, али и математичку теорију, да развију различите математичке компетенције и позитивне ставове према математици. Ученици преко моделирања математику уче са разумевањем, подстичу се да решавају сложене проблеме, да решавају проблеме на више начина и са различитих аспеката, да излажу своје идеје, као и да подвргавају своја решења провери, поређењу и побољшању. Моделирање, као начин решавања реалних проблема, подстиче ученике да разговарају о проблему (како међусобно тако и са наставником), да анализирају решења, писмено или усмено, да прате шта су други ученици урадили, да дискутују, размењују различите могућности, као и да доказују своја решења.

Моделирање у настави математике прати дидактички круг који почиње са стварним проблемом из живота и преко својих фаза води до решења проблема. Постоји више репрезентација дидактичког круга моделирања које се у суштини своде на исто: праћење корака моделирања од реалне ситуације до њеног решења. У овом раду смо се базирали на шему приказану на Слици 1, која је направљена на основу општеприхваћене шеме у методичкој литератури, предложене од стране Глорије Стилман (Stillman & Galbraith, 2003).

Приказана шема на Слици 1 односи се на фазе моделирања које су повезане когнитивним процесима које обављају ученици током процеса моделирања (Takači & Budinski, 2011). Приликом примене процеса математичког моделирања полази се од реалне ситуације, да би се преко реалног проблема дошло до математичког модела. Даље се преко добијеног математичког решења добија решење реалног проблема, тако да се модел прихвата или одбацује, у зависности од чега се пише извештај или се поново приступа процесу моделирања. Приликом преласка из једне фазе у другу потребно је да наставник и ученик изврше веома важне основне когнитивне активности.

Наставник прво бира реалну ситуацију и поставља реалан проблем са циљем да се правилно схвате и увежбају одговарајући наставни садржаји из математике. Посматране реалне ситуације и реални проблеми могу бити везани за појаве из свих наука, као и за појаве које нас окружују у свакодневним ситуацијама. Проблем се може одабрати у складу са интересовањима ученика и на тај начин они сами учествују у креирању наставе и постају њени одговорни и активни учесници.

Учење на тај начин постаје богатије, критичко и креативно и није само просто усвајање чињеница, већ је математика саставни део реалног контекста. Након одабира теме наставник треба да је прилагоди програму и свом стилу предавања, а затим да испуни активности моделирања по фазама датим на Слици 1.




*Слика 1. Круг моделирања (Stillman and Galbraith, 2003)*

**Пољине стратегије решавања математичких проблема**

Моделирање са становишта методичке теорије представљено је у претходном делу рада, док је у даљем тексту направљен осврт на хеуристички приступ настави математике. Најважнија одлика хеуристичког учења је та да наставник креира услове у којима ученици самостално закључују и проналазе решења на основу онога што знају. Важна одлика овог приступа је развијање логичког и стваралачког мишљења. Овај приступ је погодан за примену у настави математике и описан од стране Ђорђа Поље у књизи *Како решити проблем?*, (Polya, 1975). Књига је представљена као приручник за решавање проблема, где су упутства формулисана у облику кратких хеуристичких (истраживачких) питања у оквиру четири корака за решавање проблема:

1. Разумевање проблема
2. Разрађивање плана
3. Реализовање плана
4. Провера решења

Фазе решавања проблема које предлаже Пољa су кораци карактеристични за више нивое закључивања и представљају саму структуру учења.

***3.1 Примена корака Поље у математичком моделирању***

Кораке за решавање математичких проблема према Пољи можемо генерализовати и применити на математичко моделирање. Приликом преласка из једне фазе моделирања у другу изводи се низ когнитивних активности које подразумевају разумевање проблема, разрађивање и реализовање плана, као и добијање одређених резултата, који омогућавају улазак у наредну фазу. Сваки прелаз из фазе у фазу моделирања може се посматрати као посебан проблем за чије је решење неопходно применити хеуристички приступ.

На Сликама 2, 3 и 4 шематски су повезани кораци који предлаже Ђ. Пољa и кораци који су саставни део процеса моделирања. Шеме су прилагођене моделирању на основу постојећих теоријских оквира, који интегришу хеуристичке стратегије решавања проблема, моделирања и


*Слика 2. Прелази из прве у другу, из друге у трећу фазу моделирања. Други прелаз је одређен хеуристичким корацима.*

употребу рачунара (Karadag & McDougall, 2009). Направљено је проширење у односу на тај теоријски оквир у правцу примене хеуристичке стратегије решавања проблема од реалне ситуације до математичког модела, као и од математичког модела до решења реалног проблема.

*Прелаз из фазе реалне ситуације у фазу реалног проблема*

Задавање реалне ситуације и прелаз у фазу реалног проблема део је моделирања који у овом делу рада није анализиран детаљно, јер га изводи наставник.

*Прелаз из фазе реалног проблема у фазу математичког модела*

У овом делу моделирања ученици добију реалан проблем. Том приликом наставник треба да буде сигуран да су ученици *разумели проблем.* То значи да је претходно ученицима поставио питања која предлаже Ђ. Поља: „Шта су подаци које смо добили у реалном проблему? Да ли су подаци довољни да се изведу закључци или су недовољни, сувишни и контрадикторни? Шта су услови у реалном проблему, а шта су математички услови?“ Ова питања наводе ученике да разумеју проблем, али да га разматрају у математичком контексту. Када ученици схвате и поједноставе реални проблем, треба да разраде план како би добили математички модел.

Разрада плана подразумева тражење конкретних математичких модела. Ученици могу на више начина доћи до модела. Најједноставнији начин је упутити их на неки сличан проблем који им је од раније познат. На тај начин, могу се сетити неког готовог математичког модела који су претходно учили. То би могла бити формула, једначина или функција коју су радили у математичком контексту, али разумевањем проблема закључују да то представља математички модел.

Међутим, разрађивање плана не мора да се односи на готов модел. Наставник може упутити ученике да самостално дођу до модела, на пример, испитујући појединачне случајеве за реалан проблем. Према Ђ. Пољи ученика треба подстицати да се фокусира на поједине услове из реалног проблема и да покуша да процени у којој мери ти услови одређују непознате чињенице, а у којој мери могу да се мењају. Са ма-


*Слика 3. Прелаз из треће у четврту фазу моделирања. Други прелаз је одређен хеуристичким корацима.*

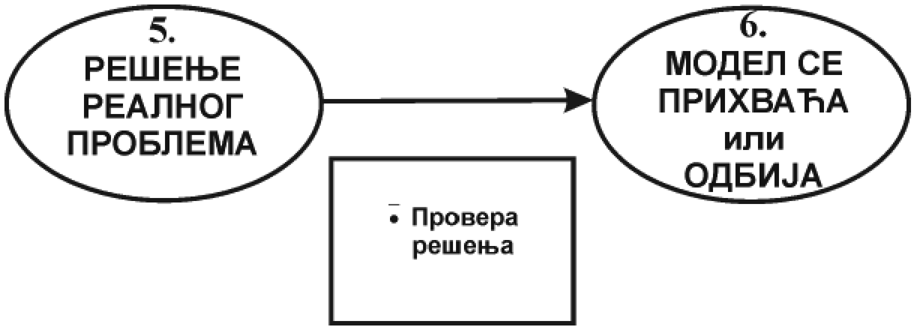
тематичке стране, ово је кључан моменат, када ученик треба да уочи зависне и независне променљиве. То у овом делу моделирања не мора да буде строго математички дефинисано, практично је довољно да ученик резонује шта од чега зависи у реалној ситуацији да би касније то математички дефинисао. Требало би да правилно дефинисани услови у овом кораку доведу ученика до доброг модела. Ђ. Поља такође наглашава да ученик треба приликом разрађивања плана да уочи имплицитне податке. То је посебно карактеристично у преласку из фазе реалног проблема у фазу математичког модела, јер се прелази из реалног контекста у математички, а реални проблем садржи имлицитно математички проблем.

Само добијање модела представља реализовање плана. Наставник треба да помогне ученицима да формулишу претпоставке и анализом података дођу до математичког модела, што представља *реализовање плана*. Да би се план реализовао, треба искористити све услове, као и релевантне чињенице кључне за проблем. Ученик треба да примени такозвани „хоризонтални" математички рад (Freudenthal, 1968) да би повезао реални и математички контекст, у овом случају, математичким моделом.

Да би процес моделирања био ефикаснији за добијање модела, може се користити рачунар. Посебно се препоручује у делу када се поставља и реализује план за добијање математичког модела. Према Карадагу и Мекдугалу, за добијање математичког модела помоћу Геогебре постављање плана подразумева конструисање објекта у њој, а реализација манипулацију њим (Karadag & McDougall, 2009).

### *Прелаз из фазе математичког модела у фазу математичког решења*

За прелазак из фазе математичког модела у фазу математичког решења неопходно је применити све фазе које предлаже Поља, сада посматрајући само математички рад. У овом делу моделирања то је „вертикални" математички рад (Freudenthal, 1968), који се односи само на математички контекст. Разумевање проблема подразумева разумевање самог математичког модела, што значи да су ученицима, на пример, познати сам математички запис и област дефинисаности или рестрикције модела. Ако је модел добијен на рачунару, у разумевање проблема спада и визуелна репрезентација модела. Разрађивање плана подразумева пут према математичком решењу. Том приликом веома је битно да уочавање зависних и независних променљивих, приказ модела и математички контекст, на пример функција, буду повезани. Када се ова фаза моделирања ради на рачунару, приказ модела је динамички и реализовање плана подразумева експеримен-




*Слика 4. Прелаз из пете у шесту фазу моделирања.*

тисање са великим бројем података. То код ученика развија напредно математичко мишљење (Tall, 1992), јер се контекст који је био интуитиван и базиран на искуству, преноси на формалну математику, дефиниције и математичке особине, логиком и дедукцијом. Крајњи резултат *реализације плана* подразумева добијање математичког решења, које би требало да доведе до решења реалног проблема. Решење треба проверити у смислу математичке коректности.

*Прелаз из фазе математичког решења у фазу решења реалног проблема*

Како математичко решење не мора да буде и решење реалног проблема, неопходно је анализирати добијена решења у реалном контексту. Ако је реализација плана успешна, онда се решења реалног проблема једноставно уочавају. Приликом *проверавања решења* треба водити рачуна о томе да ли се могу проверити сви аргументи који су довели до решења и да ли евентуално постоји неко друго решење проблема. Такође, треба проверити да ли се добијено решење може користити у неком другом проблему.

*Прелаз из фазе решења реалног проблема у фазу прихваћања или одбијања модела*

Прелаз из пете у шесту фазу моделирања веома је важан део моделирања и подразумева, према Ђ. Пољи, проверу решења. Са становишта методичке праксе веома је важно да се ученици осврну на поступак који их је довео до решења задатка.

Провера решења треба да буде темељна, јер се и у том делу развија математичко мишљење и комбинују се хоризонтални и вертикални математички рад. Успешној провери модела помаже и употреба рачунара, јер је уочавање грешака брже.

**Моделирање и хеуристички кораци кроз пример**

Приликом одабира теме моделирања треба водити рачуна, како о образовним, тако и о васпитним задацима. Васпитни задаци су постигнути ако ученик зна да примени стечено знање у животним ситуацијама, да активно учествује у изради задатака, да се критички односи према стварности. Ученике мотивишу задаци из реалног контекста који је везан за њихову свакодневицу и активности или начин живота и рада других људи. За реалну ситуацију се може одабрати, на пример, успех фудбалског тима (Будински и Такачи, 2013), земљотрес у Јапану (Budinski & Takači, 2013), мерење температуре (Budinski, 2013) и многе друге.

У овом раду смо, с намером да прикажемо конкретан пример примене моделирања с освртом на хеуристички начин учења, одабрали проблем штедње новца у банци. Новац је незаобилазна тема и због његове универзалности свако би требало да зна елементарне ствари о новцу. Та знања треба да буду део елементарне културе појединца. Такође, математички модели везани, на пример, за штедњу новца могу бити веома једноставни. Због тога су веома погодни за упознавање ученика са моделирањем и учењем математике кроз реални контекст. Пример описан у даљем тексту прилагођен је ученицима другог разреда средње школе.

*Прелаз из фазе реалне ситуације у фазу реалног проблема*

За постављање реалног проблема треба из неке банке узети реалне податке који су познати ученицима из свакодневног живота. Наставник преводи ученике из фазе реалне ситуације у фазу реалног проблема постављајући им задатак који гласи:

Претпоставимо да желиш да уложиш 5000 динара на рачун у банци „ХУ" са годишњом каматном стопом од 4% .

- Колико новца ћеш имати после десет година?
- Колико ћеш имати новца после x времена, када уложиш у новца, са z каматном стопом?

Од ученика се тражи да предвиде ситуацију и количину новца за одређено време. Реалан проблем је у овом случају једноставно формулисан једном реченицом са подацима и питањем на које ученик треба да одговори.

*Прелаз из фазе реалног проблема у фазу математичког модела*

Приликом прелаза из друге у трећу фазу моделирања *разумевање проблема* је когнитивна активност која подразумева јасност појмова из реалног проблема који се касније преводе у математички контекст. Разумевање проблема је први корак у хеуристичком начину решавања проблема. На пример, ученик мора да зна шта то значи уложити новац у банку. Он мора да разуме начин функционисања штедње и камаћења новца. Веома је битно да препозна на који начин се рачуна промена количине новца у односу на време. Затим, ученику треба да је познат појам каматне стопе изражене у процентима. Неопходно је да је позната сама ознака, али и то да је познат однос дела и целине који се изражава процентом.

Следећи хеуристички корак, на путу од реалног проблема до математичког модела, чини разрађивање плана. Приликом разрађивања плана ученик треба да уочи да се његов задатак односи на предвиђање количине новца за десет година, али и за произвољан број година. Такође, треба да примети да је количина новца у порасту из године у годину.

Што се тиче ознака, ученик може произвољно да означи податке из задатка. Битно је да означи сва три податка задата у њему. На пример, може означити са $K_0$ почетан улог, са $p$ проценат, односно каматну стопу, и са $n$ временски период. Након обележавања датих података, ученик треба да означи шта се тражи од њега у задатку. У овом случају, то је износ након неког времена штедње, који може означити са $K$.

За реализовање проблема веома је битно разрађени план реализовати. Реализовањем плана добија се математички модел и то представља хеуристичко решење проблема ове фазе моделирања. *Реализовање плана* и израда модела може се урадити на више начина:

Ученик може да изабере да реши задатак тако што ће рачунати пораст новца годину за годином. Прво треба да уочи колико ће новца имати након прве године. То може урадити на два начина познавањем основних правила процентног рачуна. Први начин је да израчуна 4% од 5000 и да тај резултат дода на улог од 5000 динара. Други начин је да израчуна 104% процента у односу на уложених 5000 динара. Овај поступак може да понови десет пута и да на тај начин добије одговор на први део проблема. Међутим, добијање самог модела и решавање другог дела реалног проблема захтева дубље разматрање проблема.

Приликом реализовања плана, као хеуристичког начина решавања проблема у процесу моделирања, ученици морају да уоче зависност времена и количине новца, у смислу да је новац зависна, а време независна промењива. На тај начин они улазе у математички контекст и долазе до појма функција. У овом делу треба да се подсете дефиниције функције, као и врсте функција које су до сад упознали. Ако пропрате претходна израчунавања, могу уочити експоненцијални раст. На то треба да их наведе независна промењива, односно време, у експоненту. Облик функције који они траже, а који ће бити математички модел, јесте $K(n)=5000 \cdot 1{,}04^n$. Даљим разматрањем, ученици могу по аналогији да резонују и да уопште запис функције као $K(n)=K_0 \cdot (1+p)^n$. То представља математички модел реалног проблема.

Трећи начин је решавање задатака помоћу формуле и без њеног извођења, ако му је та формула позната од раније. То подразумева коришћење готовог модела.

### *Прелаз из фазе математичког модела у фазу математичког решења*

Након формираног модела треба приступити тражењу математичког решења. Решење за први део задатка ученици су добили приликом претходне фазе. Међутим, други део задатка подразумева виши ниво математичког мишљења и генерализацију проблема.

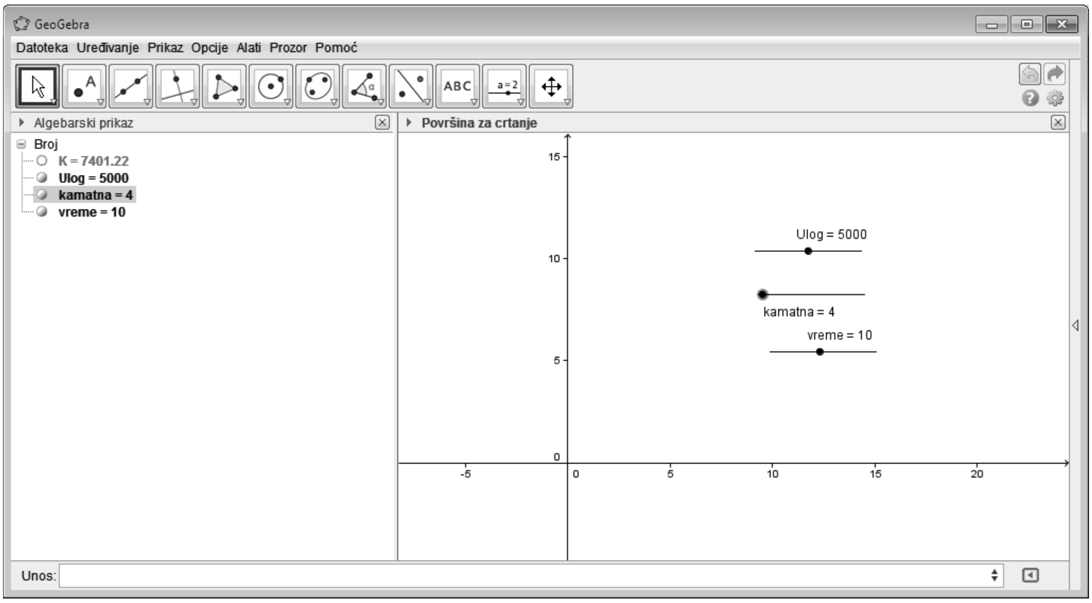
Прелазак из фазе математичког модела у фазу математичког решења захтева следеће хеуристичке кораке: разумевање проблема, разрађивање и реализовање плана. Разумевање проблема, као и само разумевање математичког модела, кључно је. То подразумева да ученик зна да је број година $x$ у формули у ствари $n$, затим да је $y$ почетни капитал, односно $K_0$, а $z$ каматна стопа. Ученик затим треба да има план како ће одговорити на питање које није дефинисано конкретно у смислу бројевних вредности. Прво, мора да замени наведене ознаке у математички модел и добије $Y(x) = y \cdot (1+z)^x$. Међутим, овакво математичко решење не подразумева решење реалног проблема. Решење реалног проблема подразумева генерализацију проблема на реалан контекст, у смислу да се добије решење за било коју вредност $x$, $y$ и $z$. Ученик треба да у свом плану решавања проблема има у виду рачунар који омогућава да се реши наведени проблем. Након овакве разраде плана прелази се на следећу фазу моделирања.

### *Прелазак из фазе математичког решења у фазу решења реалног проблема*

Прелазак из фазе математичког решења у фазу решења реалног проблема захтева од ученика две битне хеуристичке активности – реализовање плана којим ће добити решења реалног проблема на основу математичког решења, као и проверу самог решења. У овом прелазу из фазе у фазу моделирања, ученици наилазе на потешкоће, јер се од њих захтева повезивање математичког и реалног контекста. За реализовање постављеног плана у претходној фази се може користити математички софтвер. То се може урадити тако што ученици унесу у програм формулу која представља математички модел реалног проблема, као и почетне параметре задате у реалном проблему, као што су улог, каматна стопа и време. Да би реализовао свој план уз помоћ рачунара, ученик треба да води рачуна о ограничењима. Рачунар омогућава брзо добијање решења, како за наведени проблем, тако и за било коју висину улога, на било које време и под било којом каматном стопом. Због својих добрих карактеристика и доступности за помоћ при решавању проблема моделирањем препоручујемо едукативни софтвер Геогебра (www.geogebra.org). На Слици 5 је приказан део решења реалног проблема у Геогебри.

### *Прелазак из фазе решења реалног проблема у фазу прихватања или одбијања модела*

Након спроведених хеуристичких корака разумевања, прављења и реализовања плана, ученик добија неко решење. То решење не мора бити увек тачно или прихватљиво. У овом делу ученик треба да провери поступке и израчунавања који су га довели до решења. То се односи на фазу *провере решења* у процесу моделирања, али и хеуристичког решавања проблема. Ако уочи грешке приликом решавања, или ако решење нема смисла, ученик треба да понови поступак за решавања проблема.




*Слика 5. Део решења реалног проблема у Геогебри.*

**Закључак**

Приликом решавања проблема из реалног контекста, ученици пролазе кроз велики број когнитивних активности које нису уобичајене за класичне задатке. Практично у проблем реалног живота су, осим класичних математичких задатака, укључени и други аспекти, као што је разумевање реалне ситуације и реалног проблема. Сложеност проблема захтева решавање по деловима. Ти делови представљају фазе моделирања. Саме фазе, а и прелази моделирања захтевају решавање мањих проблема или задатака и представљају проблеме за себе. Сваком прелазу из фазе у фазу треба посветити пажњу у смислу разумевања проблема, разрађивања и реализовања плана, као и проверу добијених резултата. Хеуристички начин резоновања кључан је да ученици успешно реализују процес моделирања.

Са циљем боље имплементације моделирања у наставу математике, наведени приступ Глорије Стилман комбиновали смо са смерницама Ђорђа Поље за решавање проблема. У раду је приказана комбинација оба методичка приступа, како са теоријске, тако и са практичне стране. Приказано је на који начин треба усмерити ученика у процесу моделирања да би након разумевања реалне ситуације приступио анализи података и конструкцији модела којим ће доћи до решења. Детаљно су обрађене активности које воде унапређењу математичког знања, али и критичког мишљења. Да би моделирање било успешно у настави, није довољно формално задовољавати фазе. Ученик треба да се посвети фазама и прелазима, а то је управо могуће хеуристичким резоновањем проблема. Допринос овог рада методици наставе математике је у комбиновању два наведена модела, што сматрамо могућношћу за побољшање функционалног знања ученика применом моделирања и хеуристичког резоновања у настави.

**Литература**


- Antonijević, R. (2007). Oblasti istraživanja postignuća učenika: TIMSS 2007 i ПИСА 2006. *Nastava i vaspitanje*, 4, 373‒386.
- Budinski, N. (2013). Od realnog konteksta, preko matematike i fizike do linearne funckije. *Povezivanje nastavnih predmeta i modeli intgrisane nastave u osnovnoj školi* (21‒26). Sombor: Učiteljski fakultet.
- Budinski, N. & Takači, D. (2013). Using computers and context in the modeling-based teaching of logarithms. *Computers in the School*, 30 (1‒2), 30‒47.
- Будински, Н. и Такачи, Ђ. (2013). Моделирање тригонометријских функција у настави математике. *Насшава и васйишање*, LXII (2), 250‒266.
- Blomhoj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modeling. In: M. Blomhoj. & S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics* (5‒21). Roskilde: Roskilde University.
- Boaler, J. (2001). Mathematical Modeling and New Theories of Learning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 20 (3), 121‒128.
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A Modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education*, 34 (2), 110‒136.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, 1 (1), 3‒8.
- Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., & Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modeling competencies, In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA12): Education, engineering and economics* (130-140). Chichester: Horwood.
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modeling as bridge between school and university. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 196‒208.
- Karadag, Z. & McDougall, D. (2009). Dynamic worksheets: visual learning with the guidance of Polya. *MSOR Connections*, 9 (2), 13‒16.
- Lamon, S. J., Parker, W. A., & Houston, S. K. (Eds.) (2003). *Mathematical modeling: A way of life. ICTMA11*. Chichester: Horwood Publishing.
- Mason, J. (2001). Modeling modeling: Where is the centre of gravity of-for-when teaching modeling?. In: J. Matos, W. Blum, K. Houston & S. Carreira (Eds.), *Modeling and mathematics education* (36‒61). Chichester: Horwood.
- Meerschaert, M. (2010). *Mathematical Modeling*. Elsevier Science.
- Muhammad, A. S. (2008). Modelling as an Aid in Teaching Mathematicsm. *Leonardo Journal of Sciences,* 7 (12), 187‒195.
- Polya, G. (1975). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
- Stillman, G., & Galbraith, P. (2003). Towards constructing a measure of the complexity of applications tasks. In: S. J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life* (317‒327). Chichester: Horwood.

- Takači, Dj., & Budinski, N. (2011). Learning and teaching mathematics through real life models. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 18 (1), 33-38.
- *Службени гласник РС* (1991). Београд: Просветни гласник.



***Summary***

*This paper puts modelling based teaching mathematics in the well-known theoretical framework of George Polya. Polya proposed heuristic learning of mathematics. The aim of the paper is to give a brief overview of the main guidelines proposed by Polya, modelling phases and correlation between these two approaches. The approaches are easily combined because both are supporting connecting real context, problem solving with mathematical theory and meaningful learning of mathematics.*


***Key words**: mathematical modelling, mathematics, George Polya, heuristic learning.*