

Рад примљен: 8. 9. 2014.

Рад прихваћен: 7. 10. 2014.

Стручни
раддр Драгана Миличић
Универзитет у Београду, Биолошки факултетМарина Дрндарски
ОШ „Дринка Павловић“, БеоградАлбина Холод
ОШ „Раде Драинац“, БеоградЗорица Лазић
ОШ „Филип Кљајић Фића“, Београд**Фибоначи и златни пресек у
интердисциплинарној настави²**

Резиме: Златни пресек и Фибоначијеви бројеви се појављују у природи често. У математици је познато да било коју појаву златног броја ϕ можемо добити тако што саберемо две претходне појаве. У биологији, на пример, то се види у расту организма, као и кроз додавање одређеног броја јединки у популацији већ постојећима. Секвенце бројева познате као Фибоначијева серија могу се пронаћи у многим творевинама у природи, а често код живих бића и природних појава постоје обрасци са три, пет или чак осам златних спирала. Тематика златног пресека веома је погодна као метод за популаризацију интердисциплинарности у настави. Интердисциплинарна настава отвара могућности ка проширивању наставничких компетенција и доприноси размени идеја и искуства. Међутим, иако се у последње време веома инсистира на овом начину рада у школама, чини се да наставници још увек показују извесну дозу резерве о томе како у пракси, са постојећом организацијом и фондом часова, реализовати овакав вид наставе. Имајући у виду проблем са којима се наставници суочавају, на Биолошком факултету Универзитета у Београду осмишљен је тематски интердисциплинарни семинар „Спирале и зечеви“, намењен пре свега наставницима основних школа. Према мишљењу полазника семинара, примена Фибоначијевих низова својом једноставношћу и очигледношћу може допринети подизању интересовања ученика за школско истраживање, а представља и добар начин за повезивање знања из различитих предмета, као и за популаризацију науке уопште.

Кључне речи: Фибоначи, златни пресек, настава, интердисциплинарност.

1 draganam@bio.bg.ac.rs

2 Велики допринос у реализацији овог рада дали су учесници програма Унапређење наставе биологије у основној школи – др Имре Кризманић, др Гордана Субаков Симић и др Славиша Станковић, наставници Биолошког факултета Универзитета у Београду.

Увод

Интердисциплинарни/кроскурикуларни приступ настави подразумева повезивање садржаја различитих предмета (дисциплина) у јединствене целине, односно теме. Циљ оваквог планирања наставе је интегрисање наставе, развијање критичког мишљења, креативности, комуникативности и сарадње међу ученицима и наставницима. Предметна настава често има одређена ограничења, а поједини садржаји који се уче у одређеном разреду су у раскораку са сличним садржајима из других предмета, који се често изучавају у другим разредима (на пример, органске супстанце се уче из биологије у седмом разреду, а из хемије на крају осмог разреда). Интердисциплинарна настава је начин да се оваква ограничења у настави превазиђу, нарочито у оквиру предмета из природних наука како би се лакше објасниле такозване велике научне идеје, а ученици стекли релевантна знања повезана у логичке целине организоване око централне теме, питања, проблема или одређеног процеса. Интердисциплинарна настава се разликује од класичне, традиционалне и активне наставе: знања различитих дисциплина су у функцији вишестраног осветљавања проблема или теме која се истражује. Интердисциплинарна настава је по свом карактеру увек тематска јер повезује и организује у тематске целине садржаје који су слични или заједнички у различитим дисциплинама (Шефер, 2005, 2008). Предност овакве наставе је вишеструка јер се њеном реализацијом подиже ниво пажње ученика, омогућава стваралачки начин разматрања одређене теме (научна чињеница, појава или процес), препознавање, повезивање и примењивање знања из више научних дисциплина, што олакшава примену релевантних знања у свакодневном животу. Ученици су много више заинтересовани за тако конципиране наставне предмете, спремнији су за сарадњу са вршњацима, да покажу све што знају, употребе своје вештине и доносе одлуке о томе

шта и како желе да уче. Самим тим се повећава и њихов успех и обезбеђује трајније знање (Harlen, 2010).

Интердисциплинарна настава ствара могућност проширивања наставничких компетенција, размене идеја и искустава и остваривања сарадње са колегама који предају исте или различите предмете. Приликом планирања интердисциплинарне наставе на одређену тему важно је да се разуме да су програми различитих предмета део истог школског програма, па самим тим и подложни променама ради међусобног повезивања и реализације. Међутим, из угла наставника, у пракси није увек једноставно применити интердисциплинарни начин рада, направити правилан избор садржаја и уклопити га у постојећи фонд часова. Имајући у виду да наставници још увек показују резерве према оваквом начину рада и проблеме са којима се суочавају при његовом планирању и реализацији, на Биолошком факултету Универзитета у Београду је у оквиру програма *Унапређење наставе биологије у основној школи* осмишљен тематски интердисциплинарни семинар за наставнике основних школа (ЗУОВ, 2012, 2013). Као пример теме за интердисциплинарну наставу изабран је Фибоначијев низ и златни пресек. Иако на први поглед изгледа као тема која се може реализовати само на часовима математике, ако се боље сагледа, Фибоначијев низ и златни пресек могу наћи директну примену у научним дисциплинама као што су биологија, хемија и физика. А ако се крене још шире, могу се придружити и други предмети као што су српски језик, страни језици, географија, историја, ликовно, музичко и техничко васпитање. Презентација радионице „Спирале и зечеви“, која представља део овог акредитованог семинара, приказује велики број примера и могућност примене Фибоначијевих законитости, а наставницима омогућава да усаврше своја знања из биологије и спознају могуће примене не само у настави биологије већ и на другим предметима.

Теоријске поставке и методологија рада

Секвенце бројева познате као Фибоначијева серија могу се препознати у различитим творевинама у природи. У биологији се ова серија најједноставније може приказати кроз раст организама, као и на примеру додавања одређеног броја јединки у одређеној популацији већ постојећима. Најпознатији пример овог низа представља образац размножавања зечева, које је први описао један од најистакнутијих математичара средњег века – Италијан Леонардо Фибоначи (1180–1250) – по чему је овај образац добио назив Фибоначијев низ. Наиме, посматрајући размножавање зечева у свом дворишту, Фибоначи је дошао до сазнања да, ако пратимо неограничени раст популације, уочићемо одређени образац увећања њиховог броја: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... (под условом да ниједан пар у међувремену не угине). Сваки члан низа бројева, осим прва два, једнак је збиру претходна два броја.

Математичар Фибоначи се такође повезује са златним пресеком и бројем φ (фи). Број φ се добија из Фибоначијевог низа бројева у коме збир претходна два броја у низу даје вредност наредног члана низа. Фибоначијев низ почиње од нуле, а прва два члана су му 0 и 1.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181...

Ако било који број из низа поделимо са претходним, добићемо број који осцилира око броја φ , а што је апсолутна вредност чланова низа већа, то ће и вредност која се добије њиховим дељењем бити ближа броју φ .

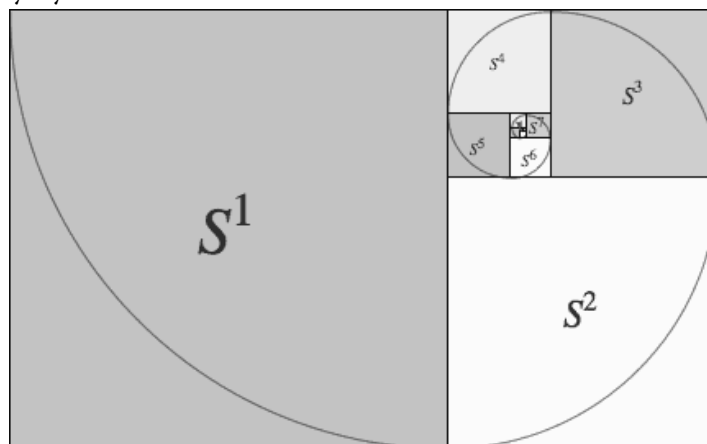
Човека су одувек импресионирале особине златног пресека. Током историје називали су га разним именима: „златни пресек“, „свети однос“, „божанска пропорција“ (Хеменвеј, 2009). Сви ти називи односе се на φ (фи), што се језиком математике објашњава као специфичан однос целине према њеним деловима савршених пропорција. То је толико савршен однос да се делови односе један према другом онако како се целина односи према већем делу. Математички изражено:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Ова једначина има једно јединствено (ирационално) позитивно решење:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887\dots$$

Ако графички прикажемо златни пре-сек, добићемо златни правоугаоник (Слика 1).



Слика 1. Пример конструисања златног правоугаоника: када се у квадрати унутар златног правоугаоника укршају лукови, добија се златна спирала.

Резултати и дискусија

Природа има своје законе и не мора увек пратити математичке обрасце, али се то, ипак, са одређеном учесталошћу дешава у природи. У живом свету се могу уочити различити геометријски облици. Један од најчешћих облика је спирала, која може бити логаритамска спирала (тзв. златна или Фибоначијева спирала), чији фактор раста одговара броју ϕ , и аритметичка спирала, која има стални раст (тзв. Архимедова спирала). Због тога је лако повезати математичке и природне моделе, а у грађи живих бића често постоје обрасци са три, пет или чак осам спирала.

Примери златне спирале у грађи живих бића и природним појавама су бројни: у биљном свету они се могу уочити у начину гранања, грађи листова, броју и распореду круничних листића, распореду семена у плоду и слично (Слика 2). На радионицама и тренинзима за наставнике основних школа наставници су имали прилику да се упознају са различитим моделима из природе који илуструју златну спиралу или који одговарају Фибоначијевом низу бројева. Приликом рада у учионици или истраживања у природи (ванучионицка интердисциплинарна настава), наставницима се дају инструкције како да обуче ученике да пронађу одређене врсте биљака код којих се појављују спирале (на пример, спирални облик врха листа папрати или рашљике винове лозе), уоче положај листова и грана или измере угао под којим оне расту у односу на стабло, изброје круничне листиће цветова и пронађу да ли њихов број одговара неком од бројева из Фибоначијевог низа. Применом правила Фибоначијевог спирале ученици могу да одговоре на питања зашто су листови на правилној удаљености један од другог, односно зашто је сваки нови, горњи лист на стаблу постављен тако да не ствара сенку старијим и нижим листовима итд. Такође, могу се користити и примери кактусоликих (сукулентних) биљака, шишарке бора или смрче, плод ананаса, цветна главица сунцокрета, карфиола или брокуле.



Слика 2. Примери биљака и животиња код којих се могу уочити златне спирале и Фибоначијев низ.

На овим примерима наставници се обучавају како да лоцирају и одреде смер спирала (у смеру кретања какав на сату или у супротном смеру) и одговоре да ли број спирала на биљци одговара броју ϕ како би то касније даље могли да искористе у наставној пракси (Слика 3).



Слика 3. Полазници семинара изучавају примере Фибоначијевих низова и спирала у природи.

Код животиња спирале се најлакше могу уочити на навојима љуштура пужева, у распореду комора љуштуре индијске лађице (*Nautilus*),

изгледу рогова појединих папкара (оваца, коза), канци животиња или кљунова птица грабљивица. Примери Фибоначијеве спирале код животиња су и увијена сурла слона, реп камелеона и пипци хоботнице или спирално савијена стонога гујин чешаљ... Приликом еколошких истраживања у природи могу се посматрати спиралне путање кружења и обрушавања (пикирања) птица грабљивица или изглед и пропорција шара на перима пауна. Занимљиво је такође да молекул ДНК, основа читавог живота на Земљи, поседује сличну законитост која одговара бројевима Фибоначијевог низа: однос висине и ширине ДНК је 21:34 ангстрема. Такође, важно је инсистирати и на томе да ученици на различитим примерима сами уоче златну Фибоначијеву спиралу и на основу наученог сами дођу до одговора, на пример, због чега се стонога, мачка која спава, змија која се спрема да нападне или људски ембрион увијају у облику спирале. На тај начин се повезују функционална знања из биологије, математике и физике (закон о одржању енергије).

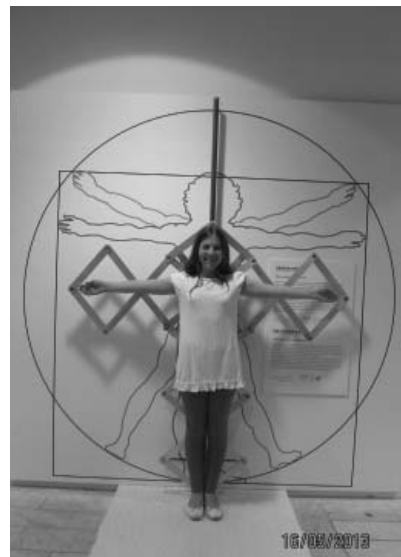
Примери примене златне спирале и Фибоначијевог низа могу се уочити и у осталим школским предметима. У настави хемије златни пресек се може повезати са односом између атомских и јонских пречника појединих хемијских елемената. У настави географије златна спирала се може повезати са спиралним изгледом галаксија (нпр. Млечни пут, који има велики број спиралних кракова, од којих сваки одговара логаритамској спирали) или међусобним удаљеностима планета (нпр. раздаљина од Земље до Марса одговара 1,618 раздаљине Земље и Венере). Такође, златна спирала се може уочити и у изгледу ураганских ветрова или водених вртлога и таласа.

У настави српског језика ова тема се препознаје у интегрисању језичких вештина (слушање, говор, читање, писање, размишљање) о животу италијанског математичара Леонарда Фибоначија, а по мишљењу језичких стручњака и метрика стихова древне поезије писане на санскриту је у оквиру златног стандарда. У настави историје

може се описати временски период раног средњег века, као и друштвене околности и начин живота познатих личности које су живе у доба Леонарда Фибоначија. Такође, примера златног пресека има и у ликовној уметности. Може се пронаћи много сликара и вајара који су разумели и користили златни пресек у својим делима (нпр. Ботичели – Рађање Венере, Леонардо да Винчи – Мона Лиза и Витрувијански човек, Микеланђело Ботичели – Давид, Салвадор Дали – Последња вечера, слике Мондријана и др.). Доказано је да уметничка дела која у основи имају златни правоугаоник више пријају људском оку.

Фибоначијев низ присутан је и у музици. Сматра се да је много композитора класичне музике користило златни пресек у редоследу музичких секвенци при компоновању својих дела, укључујући Баха, Бетовена, Шопена и Моцарта.

Ни човек није изузет од правила златног односа. Грађа људског тела је једна од најсавршенијих примера такозване златне пропорције. Примери се могу пронаћи у пропорцијама људског лица, у односу висине од стопала до пупка и од пупка до темена или у односу дужине руке од подлактице до корена шаке и од корена шаке до врха средњег прста, као и у грађи самих прстију (Слика 4).



Слика 4. Да Винчијеве мере „Витрувијанског човека“ указују на „златне пропорције“ људског тела, што је ученицима увек занимљиво за истраживање.

Закључак

Изучавање Фибоначијевих низова у природи је добар начин за подизање интересовања за градиво биологије и других школских предмета. Описани приступ пружа могућност примене интердисциплинарности у настави, утиче на подизање интересовања ученика за науку у школама и популаризацију науке уопште.

Литература

- Harlen, W. (ed.). (2010). *Principles and big ideas of science education*. Hatfield : Association for Science Education, College Lane.
- Hemenvej, P. (2009). *Tajni kod – Zlatni rez, tajanstvena formula koja vlada umetnošću, prirodom i znanošću*. Zagreb: V/B/Z.
- Шефер, Ј. (2005). Креативне активности у тематској настави, XVIII (3). Београд: *Институт за истраживања истраживања*.
- Шефер, Ј. (2008). Евалуација креативних активности у тематској настави. Београд: *Институт за истраживања истраживања*, Библиотека „Истраживачки радови“ 94.
- ЗУОВ (2012). *Каталог програма сталној стручној усавршавања наставника, васпитача, и стручних сарадника за школску 2012/2013. годину*. Београд: Центар за професионални развој запослених у образовању, Завод за унапређивање образовања и васпитања.
- ЗУОВ (2013). *Каталог програма сталној стручној усавршавања наставника, васпитача, и стручних сарадника за школску 2013/2014. годину*. Београд: Центар за професионални развој запослених у образовању, Завод за унапређивање образовања и васпитања.

Summary

Golden ratio and Fibonacci numbers appear often in nature. It is known in Mathematics that any potential of the golden number ϕ we can get by addition of the two previous potentials. In biology, for example, it is seen in organism growth, as well as adding a number to of units into the existing population. Sequences of numbers known as Fibonacci's serial can be recognized in many creations in nature, and very often among living organism and natural occurrences, there are patterns of three, five or even eight golden spirals. The topic of golden ratio is very appropriate as the model for achieving interdisciplinary segments in teaching. Interdisciplinary teaching opens possibilities towards widening teachers' competencies and contributes to exchanging ideas and experience. Nevertheless, in recent time, it has been insisted on this way of work at schools, teachers are reluctant to realize this kind of taching in practice, because of organisation and the number of classes. Taking into account problems, which teachers face, thematic interdisciplinary seminar Spirals and rabbits has been organised at the Faculty of Biology, aimed primarily at primary school teachers. According to attitudes of the participants, application of Fibonacci's arrays, by their simplicity and being so obvious, can contribute to raising students' interest for school curriculum, and it is a good way of connecting knowledge from different subject and popularization of science in general.

Key words: Fibonacci, Golden ratio, teaching, interdisciplinary approach