

**Оригинални
научни рад****Јелена Р. Стојкановић**
Гимназија „Јосиф Панчић”,
Бајина Башта, Србија**Сања М. Маричић¹**Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет,
Ужице, Србија

Развијање раној алгебарској мишљења у њушем визуелно задатих распућених низова код ученика млађих разреда основне школе

Резиме: Циљ рада је да испити да ли се помоћу визуелно задатих распућених низова може достћи адекватни ниво мишљења, односно да ли ученици могу да одреде чланове низа на удаљеним позицијама и да ли и колико њих може самостално достћи ниво генерализације. Рад је усмерен на то да утврди да ли ученици, ослањајући се на визуелизацију, могу да уоче правило раста низа, одреде чланове на удаљеним позицијама и формулишу општи члан низа. Испитивање је спроведено на узорку од 252 ученика и обухватило је три задатка, у којима се од ученика захтевало да наставе визуелни образац, нумерички представе односе и симболички изразе генерализацију. Добијени резултати показују да већина ученика успешно уочава правило и одређује удаљене чланове низа, али мало њих успева да симболички запише општи члан, што указује на недовољно развијено разумевање појма променљиве. Визуелна природа задатка подстиче функционално размишљање и омогућава ученицима да остваре најпредак ка адекватном нивоу резоновања. Налази указују на вредност визуелно задатих распућених низова као подршке развоју алгебарској мишљења и сутишту појединачног заједничког у настави математике у млађим разредима основне школе.

Кључне речи: распући низ, визуелизација, функционална зависност, генерализација

¹ sanjamaricic10@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0464-3527>

Copyright © 2025 by the publisher Faculty of Education, University of Belgrade, SERBIA.

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original paper is accurately cited.

Увод

Од последњих деценија прошлог века све више се скреће пажња истраживача на значај раног алгебарског образовања и развоја алгебарског мишљења. До средине 20. века учење алгебре било је препоручљиво само у средњој школи након што се савлада аритметика (Kieran, 2004). Појавом снажног реформаторског тренда „Нова математика” (енг. *New Math*), настава аритметике (рад са конкретним бројевима до четвртог разреда основне школе) и настава алгебре (рад са општим бројевима у следећим разредима) теку заједно једна уз другу. Тако да ученици са почетком математичког образовања усвајају и алгебарске појмове и развијају алгебарско мишљење. Алгебарско мишљење је кључна тачка за ученике у стицању математичког знања, а недостатак разумевања алгебре доприноси бројним проблемима у учењу, доказивању и решавању математичких проблема (Güler, 2016; Ferryansyah et al., 2018; Jupri et al., 2014). Док се аритметика углавном бави израчунавањима са конкретним бројевима, алгебра се бави процесима са апстрактним концептима. Прелазак са конкретного на апстрактно представља проблем за већину ученика.

Значајан број радова анализира однос између ране алгебре и аритметике, као и прелаз између њих, али проблем где аритметика престаје и почиње рана алгебра још није разрешен. Романо (Romano, 2009), осим уочене разлике у томе да се алгебарско мишљење односи на процесе док се аритметичко односи на резултате, тј. на проналажење одговора, наводи и друго мишљење (Carpenter & Levy, 2000), по ком се рана алгебра идентификује кроз два аспекта, генерализацију и коришћење симбола за представљање математичких идеја и решавање математичких проблема. Зељић (Zeljić, 2014) истиче да је прихватање и коришћење алгебарске симболике за изражавање општости изузетно важна активност за развој алгебарског мишљења, као и

да у оквиру аритметике и других наставних тема постоје широке могућности за развој овог вида мишљења, али такође тврди да не можемо рећи да тек коришћење алгебарско-симболичке нотације за изражавање идеја укључује неки вид алгебарског мишљења.

Алгебарско мишљење Киран не посматра као „разумевање алгебре”, већ као развој начина размишљања који се јавља много пре формалног увођења алгебре у наставу (Kieran, 2004b). Према његовом мишљењу, рано алгебарско размишљање присутно је *пре формалној учења алгебре*, као способност уочавања релација и структура, као разумевање процеса и релација, а не као манипулација симболима. Алгебарско мишљење обухвата препознавање и анализу односа, уочавање структура, генерализацију и симболичко изражавање (Blanton & Kaput, 2004; Kieran, 2004; Warren & Cooper, 2008). Блантон и Капут (Blanton & Kaput, 2004) посебно истичу да деца на почетку школовања могу да размишљају функционално, односно да уочавају односе између величина, што је суштинска активност ране алгебре. Савремени приступи указују да је развој алгебарског мишљења неодојив од аритметике и да наставу аритметике треба прожимати алгебарским идејама (Carpenter & Levi, 2000; Cai, Ng & Moyer, 2005). Развој алгебарског мишљења треба посматрати као природан наставак аритметике, где аритметичке активности у млађим разредима садрже елементе алгебарског резоновања, као што су уочавање односа, препознавање инваријантности, разумевање својстава операција и тражење образаца (Cai, Ng & Moyer, 2005).

Развијање алгебарског мишљења у млађим разредима захтева развијање одређених начина мишљења укључујући анализирање односа између квантитета, решавање проблема, моделовање, уочавање структуре, генерализацију, а затим и симболичко изражавање. За изграђивање значења алгебарских симбола и процеду-

ра значајна је и активност визуелног представљања квантитативних односа. Ту активност, као и употребу различитих репрезентација за представљање проблемских ситуација, многи аутори виде као значајну компоненту алгебарског мишљења (Zeljić, 2014). Један од начина на који се алгебра може учинити разумљивом и доступном свим ученицима јесте увођењем ученика у алгебарске концепте и размишљања која су прилагођена узрасту (Markworth, 2010). На пример, у првим разредима основне школе за представљање информација обично користимо илустрације као део симулиране стварности, а затим те информације представљамо парадигматским сликама, јер је иконичко представљање веома важно и оно мора претходити симболичком представљању. Зељић (Zeljić, 2014) такође инсистира на визуелизацији, која може бити од помоћи за истраживање математичких проблема и давање значења математичким појмовима и односима између њих. Ауторке Дабић Боричић и Зељић истичу да „уколико се симболи прерано одвоје од основе која даје значење симболичким манипулацијама, ученици могу испољавати преурањену формализацију и тада језик симбола постаје семантички празан” (Dabić Boričić i Zeljić, 2021, str. 40).

Везе и односи између математичких објеката, према мишљењу Романа (Romano, 2009), могу бити приказане у много форми, укључујући видљиве, као што су дијаграми, слике или графови, нумеричке, то су табеле, симболичке и вербалне. Често добро математичко објашњење, тврди Романо, укључује истовремено више ових репрезентација јер свака од њих доприноси на сопствени начин разумевању презентираних идеја, а способност за креирање, тумачење, као и прелажење са једне на другу репрезентацију, њихово међусобно упоређивање и комплентирање даје ученицима моћне алате математичког мишљења (Romano, 2009).

Алгебарска зависност међу променљивим укључује функције као начин представљања математичких веза и анализе промена (Kieran, 2004a). Функција је релација између два скупа, а функционално размишљање, које је специфичан облик алгебарског размишљања, може се дефинисати као репрезентативно мишљење које се фокусира на однос две или више различитих величина (Markworth, 2010). Постоје три начина записивања функционалних односа путем математичког језика, а то су: геометријски (шеме, дијаграми, хистограми, графици, цртежи), аритметички (бројеви, табеле, уређени парови) и алгебарски начин (словни симболи, формуле, придруживање) (Zeljić, 2014). Постоји још један облик у ком се јавља идеја функције, а који се, како наводи Зељић (Zeljić, 2014), недовољно истиче у програмима и уџбеницима математике. То је појам низа. Цај и сарадници (Cai et al., 2005), анализирајући развијање алгебарских појмова и презентација у различитим основним наставним програмима и курикулумима (Кина, Јужна Кореја, Сингапур, Русија, САД), дошли су до закључка да је неопходно подржати развој алгебарског мишљења у нижим разредима основне школе јер то је начин на који ученицима можемо помоћи да лакше направе прелаз између аритметике и алгебре и увиде корисност алгебарског приступа у решавању различитих проблема. У свих пет наставних програма главни циљ учења алгебарских појмова је разумевање квантитативних односа од стране ученика, али нагласци и приступи који помажу ученицима да продубе разумевање квантитативних односа веома се разликују у свим наведеним наставним програмима. У сингапурском наставном програму користи се визуелно задат понављајући и растући низ као идеја за лакши прелаз из аритметике на алгебру.

Цај и сарадници наглашавају да уочавање функционалних односа у нумеричким и визуелним обрасцима представља један од најмоћнијих начина за развој алгебарског начина раз-

мишљања код деце (Cai, Ng & Moyer, 2005). Аутори се залажу за приступ у ком се алгебарске идеје постепено интегришу у наставу аритметике, како би се избегла нагла и неприродна транзиција ка формалној алгебри у старијим разредима. У том контексту, визуелни растући низови представљају један од кључних дидактичких ресурса за развој раног алгебарског мишљења, јер подстичу ученике да уоче функционалне односе и постепено прелазе са описивања конкретних случајева на формулисање општих правила.

Низ се дефинише као функција чији је домен скуп природних бројева. Растући низови (обрасци) имају карактеристике које их чине јединственим и идеалним за подршку развоју функционалног мишљења ученика (Warren & Cooper, 2006; Markworth, 2010; Zeljić, 2014; Rivera & Becker, 2008). Зељић примећује да задаци са низовима пружају прилику за „истинску и значајну математичку активност” (Zeljić, 2014, str. 164). У неким ранијим студијама способност рада са низовима коришћена је као показатељ спремности за остале математичке идеје или као припрема за апстрактно резонување. Низови као линеарне генерализације представљају средство за разумевање зависних веза између вредности у математичким функцијама као и конкретан и транспарентан начин на који ученици нижих разреда основне школе могу упознати појмове апстракције и генерализације (Zeljić, 2014) и допринети у развоју алгебарског размишљања, посебно функционалног размишљања, (Beatty, 2007; Moss & London McNab, 2011; Warren & Cooper, 2008). Како наводи Киран (Kieran, 2004a), генерализација у алгебри подразумева формирање израза и једнакости који су објекти алгебре, а типичан пример је генерализација растућег низа геометријских објеката. У визуелно приказаном растућем низу чланови низа се мењају из једног у следећи обично на предвидљив начин. Такав низ укључује две променљиве, зависна променљива је неки мерљив аспект сликовног узорака предмета који координира са системом за инде-

ксирање или бројање, који је независна променљива и обезбеђује положај фигуре у низу. Дакле, визуелно задати растући низови пружају прилику наставницима и ученицима да развију концептуално разумевање променљивих. Ученици могу и вербално и нумерички да опишу како низ расте, а учитељи тада могу показати како се вербални и нумерички изрази преводе у симболички језик алгебре. Задаци са растућим низом чији су чланови представљени различитим геометријским фигурама, према мишљењу Маркворта (Markworth, 2010), пружају могућност ученицима да анализирају конкретне представе правила раста, генерализују из њих, истражују вишеструке приказе односа и различите типове функционалних односа. Овакви низови ученицима нуде могућност за означавање варијабле и њено коришћење. Визуелно задати растући низови могу да обезбеде контекст за развој алгебарског размишљања код ученика, а посебно способности да анализирају, генерализују и представљају односе (Billings et al., 2007; Markworth, 2012; Papic, 2015; Ferrara & Sinclair, 2016) и да утичу на каснија постигнућа ученика у алгебри (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Nguyen et al., 2016; Rittle-Johnson et al., 2016).

Ворен и Купер (Warren & Cooper, 2006; 2008) истичу да задаци са визуелно задатим растућим низовима представљају један од најмоћнијих контекста за развој функционалног размишљања. Они наглашавају да „ученици могу боље да уоче релације између променљивих и постепено напредују ка експлицитној генерализацији ако се суоче са низовима који се систематски мењају” (Warren & Cooper, 2006, str. 42). Њихова истраживања показују да ученици у млађим разредима основне школе могу постићи висок степен разумевања математичких односа када им се понуде задаци који омогућавају интеграцију фигуралних, нумеричких и симболичких репрезентација, чиме се подстиче постепено увођење апстрактних концепата кроз конкретне примере (Warren & Cooper, 2008, p. 57). Исте

ставове имају и Ривера и Бекер (Rivera & Becker, 2008), који истичу да визуелна природа низа делује као кључни посредник ка алгебарском начину мишљења. Њихови резултати потврђују да ученици који су у стању да уоче структурне инваријанте у низу лакше формулишу експлицитна правила. Рано уочавање шаблона и структуралних односа представља основу за каснија алгебарска постигнућа и развој генерализације, а визуелни растући нивои представљају снажан дидактички ресурс (Papić, 2015; Mulligan & Mitchelmore, 2009).

За Ланина истраживање низова представља средишњу активност у раном учењу алгебре, јер обезбеђује „динамичку репрезентацију променљивих” (Lannin, 2005, p. 233), а за Апсарија и сараднике „транзицију од аритметичког ка алгебарском начину размишљања” (Apsari et al., 2019, p. 55). Растући нивои могу представљати и линеарне и нелинеарне функције. Растом низа члан може да се повећава за фиксни број делова у свакој фази (линеарни однос) или за све већи број делова у сваком следећем члану (нелинеарни однос). Може постојати више различитих начина да се утврди правило по ком низ расте и свако од њих може довести до различито записаних, али еквивалентних израза функционалног односа. Ученици могу развити функционално размишљање директним разматрањем променљивих и промена, уопштавањем од вербалног или писаног представљања функционалног односа до симболичког приказа. Кроз ове нивове може се изградити разумевање ученика о функцијама и променљивим и подстаћи њихова способност за генерализовање. Фигурално резонување или фокус на визуелној природи самог низа доводи до тачнијих уопштавања, више смисла и бољих резултата (Markworth, 2010). Истраживања су показала да наставници могу подстаћи ученике на препознавање функционалних односа тражећи да прво вербално опишу карактеристике узорка низа, а затим да их и алгебарски изразе. Такође је откривено да специфична

питања која истичу везу између члана низа и његовог редног броја подржавају способност ученика за уопштавање. Фокус је на развијању разумевања односа између позиције члана низа и његове вредности (Warren & Cooper, 2008). Постоје два главна питања: прво је „блиско уопштавање” којим се тражи следећи члан низа коришћењем поступног цртања или бројања и друго, које подразумева „далеку генерализацију” и укључује проналажење општег правила за било који члан низа (Wilkie & Clarke, 2016). Постоји и рекурзивно размишљање, које се дефинише као постепена промена, промена корак по корак, односно захтева понављање додавања броја претходној вредности. И деца и одрасли имају тенденцију да користе рекурзиван приступ када решавају задатке са оваквим растућим нивозима. Међутим, тешко је развити рекурзивну формулу која одговара оваквом начину визуализације низа. У експлицитној формули правила наводи се однос између независне и зависне променљиве. У рекурзивној формули редни број члана низа је скоро па небитан, док је у експлицитној формули он постављен као варијабла. Експлицитна правила се сматрају кориснијим и применљивијим од рекурзивних правила. Рекурзивна правила је лако разумети, али нису баш од користи, јер, када ученик треба да изврши даљу генерализацију, коришћење рекурзивног правила постаје мукотрпно и извесни су аритметички проблеми. Експлицитна правила су ефикаснија за далекосежна уопштавања јер није потребно генерисати све међуфазе да би се дошло до одговора. Будући да већина људи који приступају растућим нивозима задатим визуелно користе рекурзивно размишљање, важно им је помоћи да виде како се рекурзивни може трансформисати у експлицитни однос (Markworth, 2010).

Идеја коју ученици тешко схватају је идеја да један симбол може истовремено представљати много величина. У случају променљивих ученици прво раде са (једновредним) непознатим и са изразима, у којим се истовремено може за-

менити само једна вредност, па не чуди да је скок на релационе променљиве, по речима ауторке Маркворт (Markworth, 2010), когнитивно управо то – скок, а не мали корак. Она наводи да је, по неким ауторима, подучавање алгебре окарактерисано журбом ка симболичком представљању. Ученици млађег школског узраста врло често осећају одбојност према елементарној алгебри, а разлог томе је што нису способни да виде значење у манипулисању алгебарским симболима (Maričić i Milinković, 2017).

Подаци из истраживања до којих су дошли Блантон и Капут (Blanton & Kaput, 2004) указују на то да су врло млади ученици способни за функционално размишљање. Они су приметили да ученици од трећег разреда могу да симболизују различите количине словима и чинило се да разумеју шта ти симболи представљају, чак су могли да изразе односе у симболизованом облику. Ово запажање даје идеју за истраживање да ли ученици трећег и четвртог разреда основне школе могу помоћу визуелно представљеног растућег низа уочити функционалну зависност и изразити општи члан низа као функцију која зависи од његовог редног броја у низу. Суштина наставе алгебре на млађем школском узрасту огледа се у повезивању алгебарских и аритметичких садржаја, при чему се у процесу учења иде у смеру од конкретног ка апстрактном. Тај пут је пут од аритметике ка алгебри, односно пут од апстракције ка уопштавању, односно генерализацији (Maričić i Milinković, 2017). Управо тим смером и тим путем нас воде овакви низови. Низови се могу сматрати уједињујућом темом наставе алгебре (Zeljić, 2014).

Метод истраживања

Циљ рада је да истражи да ли се помоћу визуелно задатих растућих низова може достићи апстрактни ниво мишљења, односно да ли ученици могу да одреде чланове низа на удаље-

ним позицијама и да ли и колико њих може самостално достићи ниво генерализације. Истраживањем смо желели да испитамо ниво функционалног размишљања код ученика кроз њихову способност да одреде непосредни следећи члан низа, удаљени члан низа и формулишу општи члан низа као и да упоредимо постигнућа ученика трећег и четвртог разреда како бисмо утврдили развојни напредак у алгебарском размишљању.

Истраживање је спроведено на популацији ученика трећег и четвртог разреда основне школе. Узорак је одабран у основним школама са територије Златиборског округа. Узорак су чинила два подзорка, ученици трећег разреда (106 ученика) и ученици четвртог разреда основне школе (146 ученика).

За инструмент истраживања коришћен је нестандардизовани тест од три задатка, модели низова у задацима су преузети од ауторке Маркворт (Markworth, 2010) али кориговани и прилагођени (Прилог 1). Питања у оквиру задатака на тесту пратила су смер од фигуралног ка нумеричком резонувању, а завршно питање у сваком од три задатка односило се на симболички изражену генерализацију. Питања која су захтевала фигурално резонување започињала су фразом „Како би нацртао...” и она су имала за циљ да подстакну ученичко размишљање на визуелну природу низа. Затим се прелазило на питања која почињу са „Колико...”, која имају за циљ да развијају нумеричке односе. Ученици су имали могућност да користе фигурално обрзложење развијено кроз одговор на полазна питања и да дају одговоре на питања која следе (Markworth, 2010). Функционалне односе ученици су представљали табеларно кроз три колоне, што је и предлог аутора Фриел и Маркворт (Friel & Markworth, 2009). У табели је извођење зависне променљиве смештено у средњу колону да функционално размишљање буде боље подржано. У средњој колони ученици су имали мо-

гућност да нумерички представе фигурални однос који су артикулисали. Општу генерализацију низа, односно одређивање формуле за n -ти члан, поставили смо као последње поље у табели како би ученици лакше дошли до ње и уочено правило уопштили и симболички записали.

Анализом Програма наставе и учења математике за први разред уочили смо да се појам низа јавља у форми бројевног низа уз активности уочавања правила и одређивања следећег члана задатог бројевног низа. Програм наставе и учења за други разред предлаже да се идеја пресликавања развија кроз активност допуњавања започетих табела зависности, док се у четвртном разреду истиче да активности одређивања следећег члана, уочавање и описивање правила на основу започетог низа као и формирање низа са задатим правилом доприносе развијању логичког мишљења и припреми за упознавање са појмом функције у наредним разредима. Пошто су се сусретали само са бројевним низовима, ученици су пре тестирања упознали са појмом визуелно задатог низа као и појмом n -тог члана низа. Циљ је био да се ученицима појасни шта се у задацима очекује и да се обезбеди разумевање основних појмова који се јављају у тесту. Поступак тестирања био је осмишљен тако да ученицима омогући разумевање захтева задатака, али без давања било каквих решења или математичких инструкција. У уводном делу ученицима је објашњено да ће радити задатке у којима је приказан визуелно задат низ, односно низ слика или облика који се мењају по одређеном правилу. Истраживач је појаснио да је потребно уочити правило по ком се низ развија и записати одговоре на постављена питања. Учесници нису добијали примере нити су са њима анализирани слични задаци пре тестирања, већ је циљ уводног дела био искључиво техничке природе – обезбеђивање разумевања форме задатка. Појам променљиве није објашњаван формално, али је ученицима речено да ће у задацима слово n означава редни број фигуре у низу. Циљ овог уводног ко-

рака био је да се избегне конфузија у разумевању симболичког записа задатка, а не да се пружи инструкција за решавање. Овако је очувана валидност теста, јер ученицима није објашњаван математички садржај нити су добијали сугестије које би утицале на исход решавања.

Сваки од три задатка са теста имао је четири дела, означена са а), б), в) и г). У првом делу од ученика се тражило да уоче започето правило, у другом да наставе низ, у трећем да одреде 10. и 41. члан низа и у четвртном да симболички представе формулу за n -ти (општи) члан низа.

Постигнућа ученика пратили смо на три нивоа разумевања, Стало и сарадници (Stalo et al., 2006) уочили су три нивоа когнитивне комплексности разумевања математичких односа у низовима:

1. емпиријска апстракција математичких односа – ниво на којем су ученици способни да наставе низ;
2. имплицитна примена општег правила – ниво на којем су ученици способни да предвиде чланове на удаљеним позицијама низа;
3. експлицитна примена општег правила – ниво на којем ученици поседују способност да генерализују низ уочавајући симболичко или вербално правило.

Резултати истраживања и дискусија

У Табели 1 приказан је укупан број ученика по разредима и број оних који су успешно урадили задатке, изражен и у процентима.

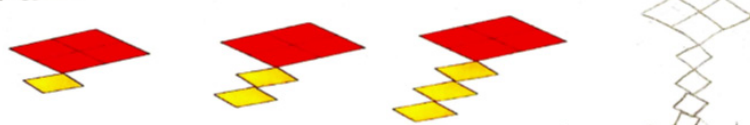
Табела 1. Број ученика који су успешно одредили изражена правила и чланове низа.

Укупно ученика		задатак				задатак				задатак				
		а)	б)	в)	г)	а)	б)	в)	г)	а)	б)	в)	г)	
III разред	106	N	106	102	84	46	106	76	30	2	88	68	10	2
		%	100	96	79	43	100	72	28	2	83	64	9	2
IV разред	146	N	140	138	126	78	136	120	50	6	120	112	38	8
		%	96	95	86	53	93	82	34	4	82	77	26	5

Први задатак за ученике је низ који смо назвали „Змај”. Тело змаја чине четири квадрата, а дужина репа се мења линеарно у складу са редним бројем члана у низу тако да први члан има један, други два и трећи три квадрата у репу. Први део задатка захтевао је од ученика да уоче правило да се на четири квадрата тела додаје број квадрата у репу. Правило је започето како би помогло ученицима да дођу до експлицитне формуле и не користе рекурзивно правило раста. У другом делу задатка захтев за ученике је био да нацртају следећи члан низа и одреде број квадрата у њему. Постављени захтев у тесту припада првом нивоу разумевања, односно подразумева емпиријску апстракцију математичких односа. Резултати показују да су сви ученици трећег разреда из узорка успешно урадили први и 96% други део задатка, а 96% ученика четвртог

разреда први и 95% други део задатка. Добијени резултат показује да су ученици способни да наставе низ и да су подједнако успешни ученици и трећег и четвртог разреда основне школе. Трећи део задатка који је другог нивоа когнитивне комплексности са захтевом да се одреди број квадрата у 10. и 41. члану низа успешно је урадио висок проценат ученика – 79% ученика трећег разреда и 86% ученика четвртог разреда. Четврти део задатка захтевао је од ученика експлицитну примену општег правила и генерализацију коју су ученици изражавали у табели са три колоне. У првој колони су редни бројеви чланова низа, и то 1, 2, 3, 4, 10, 41, n, у другој уочено правило и у трећој укупан број квадрата. Овај захтев успешно су урадила 43% ученика трећег и 53% ученика четвртог разреда, то су ученици који су уочили симболичко правило и изразили

1. ЗМАЈ



а) Први змај има $4+1$ квадратића, други има $4+2$ квадратића, а трећи има $4+3$ квадратића

б) Поред трећег змаја нацртај следећег, четвртог змаја. Колико он има квадратића? Он има $4+4$

в) Колико квадратића би имао 10., а колико 41. змај у низу? $10. = 4+10$ $41. = 4+41$

г) Попуни таблицу како је започето

Редни број змаја	Уочено правило	Укупно квадратића
1	$4+1$	5
2	$4+2$	6
3	$4+3$	7
4	$4+4$	8
10	$4+10$	14
41	$4+41$	45
n	$4+n$	$n+4$

Слика 1.

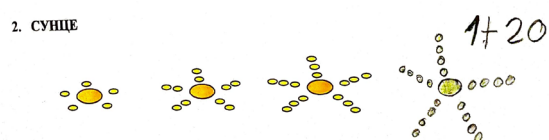
Пример решеној задатка „Змај“

функционалну зависност формулом. Добијени квантитативни подаци показују да између ученика трећег и четвртог разреда основне школе постоје мале разлике у броју успешних ученика у решавању. Овакав резултат показује да са напредовањем у савладавању програма наставе и учења математике не постоји и значајан напредак у алгебарском резонувању. На Слици 1 приказано је решење првог задатка и можемо приметити да су ученици углавном успешно дошли до генерализације и навели алгебарску експлицитну формулу за општи члан низа у последњој врсти табеле.

Други задатак из теста је низ „Сунце”, чији се чланови састоје од једног централног круга и пет кракова који се састоје такође од кругова, али зависно од редног броја члана број кругова у крацима расте. Тако прво сунце има централни круг и у сваком краку по један, другом краци имају по два, а трећем по три круга. У првом делу задатка требало је уочити започето правило којим се на један централни круг додаје број кругова у крацима, док је у другом делу задатка требало нацртати следећи члан и одредити број кругова у њему. Проценат ученика који су успешни у ова два дела је нижи од резултата за први задатак, јер се сада мења пет кракова, док је у првом задатку само реп змаја растао. Први део овог задатка успешно је урадило 100% ученика трећег и 93% ученика четвртог разреда, а други део 72% ученика трећег и 82% ученика четвртог разреда. Трећи део задатка у ком је требало одредити број кругова у 10. и 41. члану низа успешно је одредило 28% ученика трећег и 34% ученика четвртог разреда. Да би четврти део овог задатка, табелу са последњом врстом у којој је генерализација, успешно записала само 2 ученика трећег и 6 ученика четвртог разреда. Иако су ученици тачно уочили правило и имали табелу као помоћ, нису успели да функционалну зависност симболички представе.

У решењу овог задатка ученици су правили типичну грешку при генерализацији, која се огледала у неразумевању појма променљиве и уместо записа $1 + 5n$ за општи члан низа они су уписивали у табелу генерализацију без броја 5, иако су тачно настављали низ и уочавали правило за удаљене чланове низа (Слика 2). Решење ученика показује да он променљиву n тумачи као било који природан број и не везује је за вредност редног броја члана у низу, односно не увећава 5 пута, иако је то ипак урадио за, на пример, 10. и 41. члан.

2. СУНЦЕ



а) Прво сунце има $1+5$ кружића, друго има $1+10$ кружића, а треће има $1+15$ кружића

б) Поред трећег сунца нацртај следеће, четврто сунце. Колико оно има кружића?

в) Колико кружића би имало 10., а колико 41. сунце у низу? *Десети би имао 51, кружића, а 41. 206 кружића.*

г) Попуни таблицу како је започето

Редни број сунца	Уочено правило	Укупно кружића
1	$1+5$	6
2	$1+10$	11
3	$1+15$	16
4	$1+20$	21
10	$1+50$	51
41	$1+205$	206
n	$1+n$	$1+n$

Слика 2. Пример решеног задатка „Сунце”

Трећи задатак из теста назвали смо „Ресторан”, јер представља низ спојених столова са столицама око њих. Око једног стола налази се 6 столица (две са оба чела и по две са обе стране стола), око два стола имамо 10 столица и око три спојена стола је $2+12=14$ столица. Први део овог задатка, као и у претходна два, захтевао је од ученика да уоче правило по ком је формиран низ. Иако су две столице са чела на тесту обојене другом бојом како би ученици уочили започето правило, односно на те две додавали по четири за сваки сто у низу, проценат успешности је мањи него у претходна два задатка. Од укупног

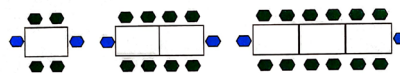
броја ученика трећег разреда 83% је тачно урадило први део овог задатка, а у четвртом разреду 82% ученика. Ученици су имали потешкоће са другим делом овог задатка, где је било потребно нацртати следећи члан са четири спојена стола и одредити број столица. Успешно је тај део задатка решило 64% ученика трећег и 77% ученика четвртог разреда. Велики пад у проценту успешних ученика уочљив је на трећем делу задатка, где је требало одредити колико столица има у 10. и 41. члану, који је успешно решило само 9% ученика трећег и 26% ученика четвртог разреда. У решавању овог задатка ученици су одустајали од израчунавања или су број столова у 10. и 41. члану множили са два, а не са четири. Уочено је и да су у средњој колони табеле (Слика 3) други сабирак само увећавали за по 4, како за почетне чланове редом, тако и за 10. и 41. члан. Добили су рекурзивну формулу али је нису могли применити на удаљене чланове.

Број столова	Уочено правило	Укупно столица
1	$2+4$	6
2	$2+8$	10
3	$2+12$	14
4	$2+16$	18
10	$2+20$	22
41	$2+24$	26
n	$2+4$	6

Слика 3. Пример попуњене табеле из задатка „Ресторан”

Генерализацију у четвртом делу задатка успешно је записало само 8 ученика четвртог и иста 2 ученика трећег разреда који су дошли до генерализације и у претходном задатку. Решења ученика показују да они не разумеју појам променљиве (Слика 4). Ученик тачно одређује правило за конкретан члан низа, али код општег члана греша. Свестан је да се броју 2 додаје број столица који зависи од броја столова (редног броја члана низа) и такође зна да је број додатих столица 4 пута већи од броја столова, али не успева да оба уочена правила повеже у једну формулу.

3. РЕСТОРАН



а) Око једног стола има $2+4$ столица ($\square$), око два стола $2+8$ столица, а око три стола $2+12$ столица

б) Нацртај следећи распоред, са четири стола. Колико тада има столица?

в) Колико столица би било са 10 столова, а колико са 41 сто у низу? $10 \text{ би било } 2+20 \text{ а } 41$

г) Попуни таблицу како је започето $2+16+4 \square$

Број столова	Уочено правило	Укупно столица
1	$2+4$	6
2	$2+8$	10
3	$2+12$	14
4	$2+16$	18
10	$2+40$	42
41	$2+164$	166
n	$2+n$	$4 \cdot n$



Слика 4. Пример решеној задатку „Ресторан”

На основу добијених резултата у истраживању можемо закључити да ученици овог узраста, иако имају способност да користе помоћ визуелизације низа, уоче правило и одреде удаљене чланове, ипак не успевају да одреде општи члан низа у другом и трећем задатку. То показује да ученици нису савладали генерализацију у алгебри нити још увек у потпуности разумеју појам променљиве, али фигурално резонување, односно визуелна природа самог низа доводи ученике до уочавања правила и разумевања функционалне зависности члана низа од редног броја његове позиције. Дакле, помоћу визуелно задатог низа ученици овог узраста могу достићи апстрактни ниво мишљења, односно могу да одреде чланове низа на удаљеним позицијама и поједини ученици успевају самостално достићи ниво генерализације. Ово истраживање нам показује да начин представљања функционалне зависности визуелно растућим низовима има велики потенцијал да заинтересује ученике да уоче симболичко или вербално правило, као и да пружа

жи одговарајућу подршку и изазов, што заузврат доводи до успеха свих ученика. Сличне резултате добили су и други истраживачи (Hourigan & Leavy, 2015; Ferrara & Sinclair, 2016; Papic, 2015; Warren & Cooper, 2008; Stalo et. al., 2006; Lee & Freiman, 2006; Wilkie & Clarke, 2016).

Резултати показују да ученици млађег школског узраста могу уочити правилност у визуелно представљеним растућим низовима, али да су у процесу генерализације често ограничени на конкретне поступке. Највећи број ученика решавао је задатке на основу бројања и додавања елемената (оперативна стратегија), док је мањи број уочавао релације између позиције и броја елемената (релацијска стратегија). Управо у задацима који захтевају формулисање правила за n -ти члан уочено је највеће опадање успешности, што указује на тешкоће у преласку са конкретног на апстрактно мишљење. Типичне грешке обухватају конкретизацију симбола n , као и неуспех у повезивању појединачних случајева у општи образац. Ови налази су у складу са налазима појединих аутора (Mulligan & Mitchelmore, 2009) који истичу да се способност уочавања образаца развија постепено и да млади ученици најчешће користе оперативне стратегије, попут бројања и додавања елемената, пре него што пређу на апстрактне релацијске стратегије. И ауторка Папић (Papic, 2015) указује да ученици тек у каснијим фазама школовања успевају да повежу позиције и број елемената у општи образац, а да је прелазак са конкретног на апстрактно мишљење чест извор грешака, укључујући конкретизацију симбола n и немогућност формулисања правила за n -ти члан низа. Наши налази потврђују ову тенденцију, јер је управо у делу задатка који захтева формулисање правила за n -ти члан забележен најслабији резултат. У контексту овог истраживања задаци нису имали за циљ развијање алгебарског мишљења, већ његово дијагностиковање у условима без наставне интервенције. Због тога резултати не говоре о утицају активности на развој генерали-

зације, већ о нивоу спонтано развијеног функционалног мишљења код ученика који у настави нису имали прилике да раде сличне задатке. У том смислу, истраживање је допринело сагледавању могућности да се идеја низа и функцијске зависности уведе у млађе разреде основне школе и укаже на потребу за променама у наставним програмима. Слично истраживање (Warren & Cooper, 2008) показује да задаци са визуелним моделима растућих низова представљају један од најприкладнијих контекста за развој функционалног размишљања и да ученици често спонтано развијају функционално мишљење уколико се сусрећу са низовима који дозвољавају уочавање односа, али да без наставне подршке генерализација остаје ограничена. Дакле, резултати наведених истраживања су у складу са нашим резултатима, с обзиром на то да задаци у истраживању нису имали утицаја на развијање алгебарског мишљења, већ његово дијагностиковање.

Учење о шаблонима се сматра важним за успостављање чврстих основа за будућа математичка постигнућа код деце, како од стране релевантних организација, тако и бројних истраживача (Fyfe et al., 2017; Kidd et al., 2013; Mulligan, 2011). Можемо рећи да је прихватање и разумевање алгебарских симбола једна од примарних тешкоћа са којима се сусрећу ученици при учењу алгебарских садржаја. Развијање значења симбола, а посебно развијање основе на којој је манипулација симболима осмишљена и праћена одговарајућим представама, примаран је задатак у учењу ране алгебре. Резултати истраживања су нам потврдили да је за изграђивање значења алгебарских симбола и процедура значајно визуелно представљање квантитативних односа. Зељић (Zeljić, 2014) истиче да манипулација симболима без везивања за значење не води разумевању.

Закључак

Контекст омогућава да се олакша и приближи алгебарски садржај ученицима млађег школског узраста, да створи основу да ученик у конкретној ситуацији види, уочи и вербално искаже односе, а потом их пребаци на апстрактни ниво (Maričić i Milinković, 2017). Тако и контекст визуелно задатог растућег низа може омогућити ученицима да развијају алгебарске начине мишљења како би се припремили за алгебарске садржаје у старијим разредима основне школе и савладали проблем генерализације у алгебри. Наше истраживање је показало да ученици млађих разреда основне школе имају проблем да разумеју појам променљиве и представе функционалну зависност симболички. Зато наставници треба да постављају питања која би имала за сврху повезивање тренутног нивоа развоја ученика и њиховог потенцијалног нивоа развоја (зоне напредног развоја). Ефикасну наставу математике треба да карактерише постављање изазовних задатака, активирање претходног знања и когнитивна активација (Zeljić, 2021). Дакле, ако визуелно задати низ успева да води ученике од визуализације преко нумеричког размишљања до апстракције и одређивања чланова на удаљеним местима, треба инсистирати и на општој генерализацији јер би то могао бити изазов и један од начина да ученици разумеју појам променљиве и значење експлицитне формуле у алгебри. Наставници би морали што више да користе овакав тип низа, а не бројевни

јер кроз задатке са визуелно задатим низом могу лакше помоћу визуализације приближити ученицима појам функционалне зависности и начине њеног изражавања. Треба имати у виду да визуелно задати растући низови могу да обезбеде контекст за развој алгебарског размишљања, а посебно способности анализе, генерализације и представљања односа (Billings et al., 2007; Markworth, 2012). Зељић (Zeljić, 2014) наводи да низови нису садржаји који се експлицитно истичу у програму наставе математике и сматра да они омогућавају развој способности апстракције и уопштавања. Овим садржајима ученике припремамо за наредне фазе учења математике, па, према томе, они нису ни формални ни небитни. Резултати указују на потенцијал визуелно представљених растућих низова као подстицаја за развој функционалног и алгебарског мишљења у раном школском узрасту. Ученици који су успели да генерализују правило низа показују да је могуће достићи апстрактнији ниво мишљења и без формалног увођења алгебарске симболике, ако је задатак довољно јасно структуриран и визуелно подржан. Са становишта наставне праксе, ови налази наглашавају потребу да се задаци са низовима и обрасцима систематски уврсте у наставне програме млађих разреда као контекст за рано уочавање релација, структура и зависности. Такође, имплицирају значај осмишљавања наставних ситуација које би омогућиле постепен прелаз са конкретних на симболичке представе као предуслов за развој алгебарског начина мишљења.

Литература

- Apsari, R. A., Putri, R. I. I., Sariyasa, Abels, M., & Prayitno, S. (2019). Geometry representation to develop algebraic thinking: A recommendation for a pattern investigation in pre-algebra class. *Journal on Mathematics Education*, 11(1), 45–58. <http://doi.org/10.22342/jme.11.1.9535.45-58>
- Beatty, R. (2007). Young students' understanding of linear functions: Using geometric growing patterns to mediate the link between symbolic notation and graphs. In T. Lamberg (Ed.). *Proceedings of the twenty-ninth annual meeting of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 148–155). North American Chapter.

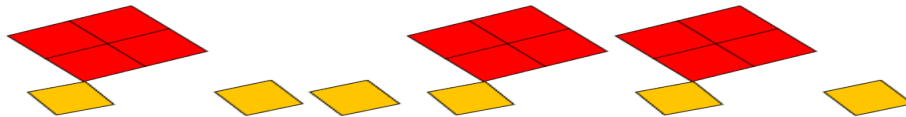
- Billings, E. M. H., Tiedt, T. L. & L. H. Slater (2007). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 302–308.
- Blanton, M., Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 135–142.
- Cai, J. et al. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross – Cultural Comparative Perspective. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 37(1), 5–15.
- Cai, J., Ng, D., & Moyer, J. (2005). *Developing algebraic thinking in earlier grades. Proceedings of PME*, 29(1), 39–66.
- Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. National Center for improving student learning and achievement in mathematics and science.
- Dabić Boričić, M. M., & Zeljić, M. Ž. (2021). Modelovanje ekvivalencije matematičkih izraza u početnoj nastavi. *Inovacije u nastavi*, 34(1), 30–43. <https://doi.org/10.5937/inovacije2101030D>
- Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An Early Algebra Approach to Pattern Generalization: Actualizing the Virtual through Words, Gestures and Toilet Paper. *Education Study Mathematics*, 92, 1–19. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9674-3>
- Ferrysanyah, Widyawati, E., & Rahayu, S. (2018). The analysis of students' difficulty in learning linear algebra. *Journal of Physics: Conference Series*, 1028(1). <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1028/1/012152>
- Friel, S. N., & Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *MatheMatics Teaching in the Middle School*, 15(1), 24–33.
- Fyfe, E. R. et al. (2017). Relations between Patterning Skill and Differing Aspects of Early Mathematics Knowledge. *Cognitive Development*, 44, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2017.07.003>
- Güler, G. (2016). The difficulties experienced in teaching proof to prospective mathematics teachers: Academician views. *Higher Education Studies*, 6(1), 145–158. <http://dx.doi.org/10.5539/hes.v6n1p145>
- Hourigan, M., & Leavy, A. (2015). Geometric growing patterns: What's the rule?. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 20(4), 31–39.
- Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Group of Australasia Journal*, 26(4), 683–710. <http://dx.doi.org/10.1007/s13394-013-0097-0>
- Kidd, J. K. et al. (2013). Effects of Patterning Instruction on the Academic Achievement of 1st-Grade Children. *Journal of Research on Childhood Education*, 27, 224–238. <https://doi.org/10.1080/02568543.2013.766664>
- Kieran, C. (2004a). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it?. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2004b). The core of algebraic thinking in the early grades. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 39–56). Springer.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3
- Lee, L., & Freiman, V. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *MatheMatics Teaching in the Middle School*, 11(9), 428–433.

- Markworth, K. A. (2010). *Growing and Growing: Promoting Functional Thinking with Geometric Growing Patterns* (unpublished doctoral dissertation). University of North Carolina at Chapel Hill.
- Markworth, K. A. (2012). Growing patterns: Seeing beyond counting. *Teaching Children Mathematics*, 19(4), 254–262.
- Maričić, S., i Milinković, N. (2017). Udžbenik u stvaranju uslova za kontekstualni pristup učenju sadržaja algebre u početnoj nastavi matematike. *Zbornik radova*, 20(19), 117–130.
- Moss, J., & London McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. *Early Algebraization*, 277–301.
- Mulligan, J. (2011). Towards Understanding the Origins of Children's Difficulties in Mathematics Learning. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 16, 19–39. <https://doi.org/10.1080/19404158.2011.563476>
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49. <https://doi.org/10.1007/BF03217544>
- Nguyen, T. et al. (2016). Which Preschool Mathematics Competences Are Most Predictive of Fifth Grade Achievement? *Early Childhood Research Quarterly*, 36, 550–560. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003>
- Papic, M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: Identifying Young Australian Indigenous Children's Patterning Skills. *Mathematics Education Research*, 27, 519–534. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8>
- Rittle-Johnson, B. et al. (2016). Early Math Trajectories: Low-Income Children's Mathematics Knowledge from Ages 4 to 11. *Child Development*, 88, 1727–1742. <https://doi.org/10.1111/cdev.12662>
- Rivera, F. & Becker, J. (2008). From Patterns to Algebra: The Development of Generalized Thinking. *ZDM*, 40(1). <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0068-6>
- Romano, D. (2009). Šta je algebarsko mišljenje?. *MAT-KOL(Banja Luka)*, 15(2), 19–29.
- Stalo, M. et al. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representations. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 161–168). PME.
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2006a). Using repeating patterns to explore functional thinking. *APMC*, 11(1), 9–14.
- Warren, E., & Cooper, T. (2006b). Developing functional thinking through growing patterns. In *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 39–66). PME.
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171–185.
- Wilkie, K. J., & Clarke, D. (2016). Developing Students' Functional Thinking in Algebra through Different Visualisations of a Growing Pattern's Structure. *Mathematics Education Research Journal*, 28(2), 223–243. <https://doi-org.ezp.sub.su.se/10.1007/s13394-015-0146-y>
- Zeljić, M. (2014). *Metodički aspekti rane algebre*. Učiteljski fakultet.
- Zeljić, M. (2021). *Učenje i poučavanje matematike – jednakost sa više (ne)poznatih*. Učiteljski fakultet.

Прилог 1

Посматрај слике и пробај да уочиш правило, одговориш на питања и попуниш таблицу.

1. ЗМАЈ



- а) Први змај има $4 + _$ квадратића, други има $_ + _$ квадратића, а трећи има $_ + _$ квадратића.
 б) Поред трећег змаја нацртај следећег, четвртог змаја. Колико он има квадратића? _____
 в) Колико квадратића би имао 10. змај у низу? _____
 г) Попуни таблицу како је започето:

Редни број змаја	Уочено правило	Укупно квадратића
1.	$4 + _$	
2.		
3.		
4.		
10.		
41.		
n		

2. СУНЦЕ



- а) Прво сунце има $1 + _$ кружића, друго има $_ + _$ кружића, а треће има $_ + _$ кружића
 б) Поред трећег сунца нацртај следеће, четврто сунце. Колико оно има кружића? _____
 в) Колико кружића би имало 10. сунце у низу? _____
 г) Попуни таблицу како је започето:

Редни број сунца	Уочено правило	Укупно кружића
1.	4+_	
2.		
3.		
4.		
10.		
41.		
n		

3. РЕСТОРАН



- а) Око једног стола има $2+_$ столица (), око два стола $_+_$ столица, а око три стола $_+_$ столица.
- б) Нацртај следећи распоред, са четири стола. Колико тада има столица? _____
- в) Колико столица би било са 10 столова, а колико са 41 столом у низу? _____
- г) Попуни таблицу како је започето:

Број столова	Уочено правило	Укупно столица
1	$2+_$	
2		
3		
4		
10		
41		
n		

Summary

The aim of the paper is to investigate whether, with the help of the visually given growing patterns, an abstract level of thinking can be reached, namely, whether students can determine the members of the sequence at distant positions and whether and how many of them can independently reach the level of generalization. The paper aims to define whether students, relying on visualization, can observe the rule of the growing pattern, determine terms at distant positions, and formulate the general term of the sequence. The research was done on the sample of 252 students and included three tasks requiring students to continue a visual pattern, represent relationships numerically, and express generalization symbolically. The obtained results show that the majority of the students observe the rule and determine the distant members of the sequence successfully, but a small number of them manages to write down the general member symbolically, indicating insufficiently developed understanding of the concept of a variable. The visual nature of the given tasks encourages functional thinking and allows students to make progress towards an abstract level of reasoning. The findings point to the value of visually assigned growing patterns as a support for the development of algebraic thinking and suggest the need for their greater representation in the teaching of mathematics in the lower grades of primary school.

Keywords: growing patterns, visualization, functional dependence, generalization